La constitution de l'écriture symbolique mathématique.

Michel Serfati

Michel SERFATI

LA CONSTITUTION

DE

L'ECRITURE SYMBOLIQUE MATHEMATIQUE.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris I
en Philosophie.

présentée sous la direction de M. Jacques BOUVERESSE.

soutenue le 13 décembre 1997 devant le jury composé de

M. Jacques BOUVERESSE (Collège de France)
M. Philippe DE ROUILHAN (C.N.R.S)
M. Michel FICHANT (Université de Paris X)
M. Alain MICHEL(Université de Provence)

Michel SERFATI

LA CONSTITUTION

DE

L'ECRITURE SYMBOLIQUE MATHEMATIQUE.

Thèse de Doctorat de l'Université Paris I
en Philosophie.

présentée sous la direction de M. Jacques BOUVERESSE.

soutenue le 13 décembre 1997 devant le jury composé de

M. Jacques BOUVERESSE (Collège de France)
M. Philippe DE ROUILHAN (C.N.R.S)
M. Michel FICHANT (Université de Paris X)
M. Alain MICHEL(Université de Provence)

Je dédie le présent travail à ma fille
Juliette Claire Hélène SERFATI,
morte à trente ans le 5 novembre 1996.

Les remerciements aux membres du jury sont une figure universitaire obligée de chaque soutenance de thèse, quelle qu'en soit la discipline. Un usage qui n'exclut évidemment pas pour autant la sincérité de la démarche. Je souhaite donc remercier ici très sincèrement Jacques Bouveresse, Professeur au Collège de France, pour la compréhension et l'appui qu'il m'a témoignés durant les années de rédaction de la présente thèse, aussi pour les conseils et remarques qu'il a apportés sur le texte. C'est aussi par lui, au travers de son séminaire de D.E.A à l'Université de Paris I, que j'ai découvert l'enseignement de la philosophie.

Je veux ensuite témoigner ma gratitude à Michel Fichant, Philippe de Rouilhan, et Alain Michel, pour les louanges et les critiques, constructives et courtoises, sur le fond comme sur la forme, qu'ils m'ont apportées au cours de cette véritable discussion à plusieurs voix que fut parfois ma soutenance. Une pratique philosophique authentique dont on regrette bien qu'elle ne soit plus guère en usage dans les thèses de Sciences.

Par sa présence et son aide quotidiennes, ma femme a grandement contribué à ce que j'aie pu venir à bout du présent travail. Qu'elle en soit aussi remerciée.

Paris-Jàvea, décembre 1997.

La constitution

de

l'écriture symbolique mathématique.

Erratum :
Par suite d'une erreur de ma part, les pages 163 et 164 sont virtuelles.

LA CONSTITUTION DE L'ECRITURE SYMBOLIQUE MATHEMATIQUE .

INTRODUCTION.

Cette thèse est d'abord consacrée à la description de la constitution de l'écriture symbolique mathématique, pour l'essentiel achevée en 1637 avec la *Géométrie* de Descartes, aussi à l'examen critique de certaines des figures transcendentales[1] de la connaissance mathématique ainsi organisées par le nouveau système et qui dès lors gouvernèrent la pensée des géomètres, enfin à l'analyse du rôle de la nouvelle symbolique dans l'invention mathématique et dans certaines créations d'objets neufs, principalement aux XVII^e^ et XVIII^e^ siècles, parfois aussi à la période contemporaine. Ainsi la perspective du présent travail sera-t-elle l'invention mathématique, dans ses visées simples et naïves en dépit de réalisations parfois complexes ou enveloppées, et non pas celle d'une construction formelle, qui viendrait reproduire les projets de Charactéristique leibnizienne ou d'idéographie [2] de Gottlob Frege. Leibniz, qu'on rencontrera presque à chaque chapitre demeurera pourtant la figure centrale de notre thèse, et nous ferons aussi quelques références à Frege. Nous ne nous inscrirons cependant pas ici dans leurs deux tentatives d'une écriture symbolique de la pensée. Notre propos est à la fois plus modeste (il n'est pas question de proposer en général une écriture des concepts) et peut-être aussi plus ambitieux sur un point: décrire en quoi l'écriture symbolique aura décisivement contribué à l'invention en mathématiques même. Ainsi cette thèse commence et s'achève dans le champ de la philosophie et de l'épistémologie des mathématiques.

---

1 Ce terme sera ici partout pris dans l'acception particulière que lui donne G. Granger, pour qui transcendental qualifie la capacité d'un concept à *objectiver* : "Nous partons ici de la notion kantienne, mais sans prétendre à la fidélité à laquelle serait tenu l'historien ; et tout en conservant, croyons-nous, l'essentiel, nous la redéfinirons à la lumière des développements postérieurs de la science.

Ainsi la fonction transcendantale d'un concept sera-t-elle définie comme établissant les conditions de la possibilité de considérer comme objets les entités auxquelles il renvoie"; GRANGER G : *Le transcendantal et le formel en mathématiques*, in *formes, opérations, objets..* Vrin. Paris, 149-150.

2 Entre idéographie et *Begriffschift* , nous suivrons ici C.Imbert : "Nous désignerons par *Begriffschift* l'opuscule de 1879; par *idéographie*,le symbolisme parfait (*vollkommene Zeichensprache*)dont Frege fut en quête pendant plus de quarante ans." Gottlob Frege, *Ecrits logiques et philosophiques*.traduction et introduction de Claude Imbert. Seuil. Paris. 1971, page 20.

i2

Les chapitres 1 à 10 en constituent la première partie, *Le système.* Ils décrivent la constitution de l'écriture symbolique, de Diophante à Descartes, et son organisation achevée dans la *Géométrie.* Nous montrerons comment, sur ce plan symbolique, le principal s'est en fait joué de 1591 à 1637, entre l'*Introduction à l'Art Analytic* de Viète et la *Géométrie* de Descartes. Et Descartes donc, de transmettre à Leibniz un système d'écriture neuf, constitué sur le terrain en dehors de toute décision collective des géomètres du temps, et moins encore évidemment de ces listes préalables exhaustives de définitions ou de conventions que nous sommes quotidiennement tenus de respecter. Erigé sur des fondements combinatoires non explicités, ce système d'écriture présentait, au XVII^{e} siècle, des mécanismes entièrement neufs au regard des écritures rhétoriques antérieures des mathématiques, grecque, puis médiévale; il est, pour l'essentiel, celui qui fonctionne toujours aujourd'hui. On décrira brièvement, de Diophante à Stiefel et Cardan, les systèmes rudimentaires préalables, grecs puis médiévaux, tel le cossique avec ses apories. On analysera dans le détail le système universel des Lettres introduit par Viète dans l'*Isagoge* de 1591, et qui constitua le premier apport symbolique décisif, bouleversant les principes antiques, jusque-là intangibles, de l'écriture des mathématiques et des sciences. Même aujourd'hui, il ne nous paraît pas que l'épistémologie ait reconnu à Viète la place éminente qu'il mérite à ce titre. Qu'une contribution aussi décisive fut historiquement si tardive ne fut cependant pas un effet du hasard, comme nous l'analysons aussi. Le second temps fut celui de Descartes, dont la contribution, pleinement accomplie dans la *Géométrie* de 1637, fut pareillement capitale sur trois points essentiels: la ponctuation du texte symbolique, sa présence tout comme son élision, l'exponentielle cartésienne ensuite, la Boucle enfin (improprement appelée "signe d'égalité"). On montrera comment, placée sur le devant de la scène par la richesse de son contenu autant que par l'autorité de Descartes, la *Géométrie,* en dépit de l'absence complète d'indications explicites de la part de son auteur, servit néanmoins de modèle incontesté à la postérité pour le déchiffrage des textes symboliques à venir (la "pierre de Rosette"), non seulement donc pour les signes et formes symboliques qu'elle apportait avec elle au lecteur neuf du XVII^{e} siècle, mais aussi par ce qu'elle ne contenait pas: des signes de ponctuation.

Ainsi se constitua une symbolique qu'en hommage à Leibniz nous dénommerons le registre combinatoire des mathématiques, en l'opposant à celui de la signification. Nous avons préféré ces deux termes à ceux de syntaxe et sémantique, aujourd'hui plus usuels, en particulier dans le cadre des langages formels. D'abord parce que cette dernière terminologie nous a paru anachronique, s'agissant principalement de décrire dans cette thèse la constitution d'une symbolique achevée avec Descartes et développée par Leibniz. Ainsi avons nous naturellement préféré des termes leibniziens. D'une façon générale, nous nous sommes efforcés dans le présent travail de proscrire autant qu'il nous a été possible l'emploi de termes techniques anachroniques. D'un autre côté, nous avons aussi maintenu notre terme des deux "registres", à l'effet de souligner la comprésence de deux entités séparées, d'importance comparable, mais de structures différentes, en dehors de toute organisation hiérarchique à deux niveaux, où l'une présenterait sur l'autre une quelconque antériorité logique, chronologique ou causale, et qui serait définitive. En dehors aussi de toute solidarité extrinsèque rigide. Une conception qui résulte de nos conclusions dans le texte et de ce que nous appellerons la faculté d'autonomie (locale et momentanée) du registre combinatoire, par rapport à celui des significations et qu'on observera pour la première fois dans l'oeuvre de Leibniz. [3]

Quoiqu'il en soit, l'analyse de ce registre combinatoire est à notre sens une part essentielle de l'épistémologie des mathématiques, qui n'a jusqu'ici guère fait l'objet d'études pour le XVII^e siècle. A ses côtés, on trouvera évidemment aussi celui de la signification des assemblages combinatoires ainsi constitués, un aspect qui est par contre l'objet usuel de l'histoire des mathématiques et sera ici assez peu détaillé [4]. On s'intéressera par contre à décrire les liaisons entre les deux registres qui, dans les débuts, se firent à sens unique: avant Leibniz en effet, dans les premiers temps de la constitution des deux registres, les seuls mouvements de pensée reconnus comme légitimes se faisaient dans le sens de la représentation: du registre des significations vers le symbolique. Ni Descartes, ni bien entendu Cardan ne considérèrent qu'ils pussent recevoir des suggestions provenant du texte symbolique! Nous décrirons alors la genèse et le développement de méthodes (l'indétermination, la dialectique de l'"arbitraire mais fixé", l'exécution successive d'un

---

[3] Cette absence d'une liaison univoque et rigide (contrairement à ce que soutient Frege par exemple) est un trait décisif de l'invention mathématique. Si donc nous avons retenu le terme "combinatoire", c'est en raison de son origine leibnizienne.

[4] Dans ce travail on a en effet porté assez peu d'attention aux significations véritables d'une Forme (symbolique mathématique) qu'on n'a nullement tâché de définir de façon mathématiquement précise. Certes, on distinguera bien deux éléments fondamentaux, procédure et substance, mais sans chercher à définir avec plus de précision les contenus eux-mêmes. Ainsi dira-t-on simplement d'une substance qu'elle est "un certain nombre" sans que le véritable statut du "nombre" soit clarifié, tel qu'il peut l'être aujourd'hui. Aussi parlera-t-on sans plus de précision de "nombres au sens leibnizien des *Nouveaux Essais* ".

nombre considérable d'instructions opératoires) qui trouvèrent évidemment leur origine dans ces bouleversements symboliques, mais se traduisirent aussi en retour à travers eux, des modes de pensée qui nous sont aujourd'hui si familiers qu'on a peine à croire qu'ils aient pu ne pas être. Ainsi s'achèvera avec Descartes et le chapitre 10 (*Descartes et l'écriture symbolique*) la première partie : nous y avons choisi, au risque de paraître un peu long, une description exhaustive des étapes épistémologiques de l'évolution du système symbolique. Cette analyse de la création du système fournit en effet l'appareil conceptuel et terminologique indispensable à la description de certaines modalités de l'invention mathématique, objet de la seconde partie, qui serait inconcevable sans lui. D'un autre côté, l'histoire et l'épistémologie des concepts centraux (comme l'indéterminé), tels qu'apportés par notre première partie, pourraient, à notre sens, fournir cadre, structure, et terminologie décisifs pour une analyse didactique conséquente des méthodes d'enseignement des mathématiques, quel qu'en soit le niveau, universitaire ou scolaire.

Les quatre derniers chapitres constituent la seconde partie, *Symbolique et invention*. Elle s'organise d'abord et surtout autour de Leibniz. On ne s'étonnera pas que, dans ces questions d'écriture mathématique, Leibniz soit un acteur passionné et efficace autant qu'un témoin privilégié. On verra comment le jeune Leibniz, alors apprenti en mathématiques, mais pourvu d'une appréhension exacte et profonde, presque tactile, du fond véritable des choses, s'instruisit immédiatement sur le sujet du symbolique par le moyen de deux questions essentielles: exposant newtonien et "quantités imaginaires".

Nous commencerons ainsi par une brève étude de la réception par Leibniz du système symbolique antérieur: outre le legs de Descartes, celle-ci s'ordonnera autour de sa rencontre avec toute une famille de problèmes combinatoires et signifiants essentiels, soulevés par l'*Epistola Prior* de Newton de Juin 1676. Etroitement dépendante en apparence d'une forme très spécifique de l'écriture mathématique - l'exposant newtonien- l'*Epistola Prior* deviendra en fait pour Leibniz la source de questions d'un ordre épistémologique supérieur, telles les places respectives de la nécessité et la contingence dans les définitions constitutives des objets. Le chapitre 12 (*Charactéristique et Nouveau Calcul chez Leibniz*) décrit dans le détail comment Leibniz élabora ce qui fut pour lui le coeur de son oeuvre mathématique, son Algorithme des différences et des sommes, primitivement par le pur jeu combinatoire des substitutions, en dehors de toute question de significations. Nous mettrons ainsi en évidence comment cette construction, si largement analysée par l'histoire des sciences sur le plan de son contenu, fut avant tout la première à se trouver complètement ancrée dans le symbolique et inconcevable en dehors de lui. Ce fut en vérité Leibniz qui le premier dégagea ainsi dans les faits l'existence des deux registres : combinatoire et significations. Ce fut surtout le seul à tirer de cette division cette conclusion théorique aujourd'hui encore si complètement valide: l'écriture mathématique est bien souvent le lieu - ou le moyen - de construire des preuves et de créer des objets. Et ce, à son niveau, c'est-à-dire donc, initialement en dehors de toute signification [5].

Nous élargirons ensuite, très considérablement au-delà de Leibniz, ce concept de "jeu combinatoire" pour le présenter à l'avant dernier chapitre (*L'Art combinatoire. Substitutions et métamorphoses*) sous une forme à la fois plus générale et plus moderne, et surtout replacée dans les perspectives essentielles qu'il offre, aujourd'hui comme hier, à l'invention mathématique ancrée dans le symbolique: ainsi de ce que nous appellerons la dialectique extension-instantiation et des modalités étonnemment diverses par lesquelle elle permet de créer, en mathématiques, une espèce à partir d'un individu.

Au dernier chapitre (*Formes sans significations*), on s'efforcera de décrire l'émergence historique d'un meta-procédé de construction d'objets mathématiques à partir de leur écriture symbolique, que nous analysons d'abord *in statu nascendi* dans les correspondances de 1676 entre Leibniz et Newton, puis dans la création *moderne* du corps des nombres complexes, qui est venue dénouer au début de notre siècle l'énigme centenaire des "quantités imaginaires"de Bombelli. Ce schéma épistémologique nous paraît être d'usage courant en mathématiques, aujourd'hui comme hier, mais n'a pas été, à notre connaissance, dégagé et étudié en tant que tel. Nous en examinons alors diverses applications, tant au XVIIIe siècle chez Euler (exponentielle complexe ou "factorielle"neuve) que récents (dérivation au sens des distributions chez Laurent Schwartz), ainsi qu'un exemple tiré de notre expérience personnelle. Par ce procédé en forme d'apothéose symbolique, le géomètre peut, dans certains cas, apporter une signification à une écriture qui en était dépourvue et dans le même geste étendre le champ de validité d'une proposition mathématique,

---

5 A ces conclusions auxquelles Leibniz parviendra assez vite (dès 1679 et la lettre à Huygens sur la Charactéristique Géométrique),il se tiendra dès lors toute sa vie.

instituant ainsi à l'évidence un mode de création d'objets spécifiquement ancré dans le symbolique.

On évoquera en terminant les quelques problèmes soulevés par la terminologie et les solutions que nous avons adoptées. Des difficultés qui relèvent d'une commune origine, inscrite dans la nature même du sujet dont nous traitons. On observera d'abord simplement que le discours mathématique quotidien, écrit ou parlé, s'accompagne ordinairement d'une double confusion: d'une part entre combinatoire et signifiant, d'autre part entre ce que nous appellerons substance et procédure. Si cette seconde confusion persiste usuellement dans l'exposé oral, elle est par contre ordinairement corrigée et dissoute dans les textes contemporains convenablement écrits, ceux dans lesquels l'auteur se contraint à des énoncés rigoureux, et vient par exemple distinguer clairement entre la *substance* de la fonction f et la *procédure* $x \rightarrow f(x) = \sin(x)$.

D'une façon surprenante, bien qu'elle aille de soi, et soit aujourd'hui ordinairement parfaitement repérée et décrite, la première des distinctions entre signifiant et combinatoire, ou encore chose et symbole, n'est par contre pas usuellement inscrite dans le langage mathématique courant, même dans l'écrit [6]. Ce point est nettement relevé par Frege dans *Qu'est-ce qu'une fonction* [7]? Nous en donnons ci-dessous des exemples détaillés.

Ainsi nous-mêmes, pour être rigoureux, aurions nous dû écrire *supra* : "la fonction *dont un signe* est f", en un énoncé qui sépare clairement la chose de sa représentation, tout comme dans cet exemple: "l'entier de signe 3", ou bien cet autre: "la matrice carrée de signe A, dont la taille est l'entier qui a pour signe p", ou encore: "le triangle dont *une représentation* est ABC" etc... Or *aucun* de ces énoncés ne se rencontre effectivement dans la pratique, même dans les écrits rédigés avec précision, une situation bien usuelle, qu'on a l'habitude de porter au compte d'impératifs compréhensibles de brièveté. Et il

---

6 La division entre les deux registres, combinatoire et signifiant, pourtant clairement ébauchée par Leibniz, n'a été mise en acte de façon véritablement opératoire que depuis Frege. Toute une partie de la position mathématique du XIX^{e} siècle (chez Boole par exemple) avait même consisté à confondre dans les faits un signe mathématique et son interprétation.

7 " La distinction entre signe et signifié n'a pas toujours été faite avec la rigueur voulue ; et en parlant d'expression de calcul (expressio analytica), on en est venu, ou presque, à comprendre aussi la dénotation d'une telle expression. Que désigne " $x^2 + 3x$ " ? Rien, à vrai dire, car la lettre "x" indique un nombre, mais ne le désigne pas", in*Was ist eine Funktion* ? in *Festschrift L.Boltzmann gewidme zum 60. Geburstage.* Leipzig A. Barth, 1904; pages 656-666 Traduit (*Qu'est-ce qu'une fonction* ?)par " IMBERT C,*Ecrits logiques...*, op.cit, 166.

est vrai que des textes mathématiques où l'on voudrait voir observer un respect rigoureux de la distinction signifiant-signifié, d'une part demanderaient à leur auteur des efforts supplémentaires continus, d'autre part s'offriraient au lecteur comme des énoncés plus longs et bien plus embarrassés que ceux que nous connaissons aujourd'hui. Quoiqu'il en soit, il y a donc ici confusion, quotidienne et universelle, entre les registres combinatoire et signifiant, et toujours de cette même façon: c'est le représentant qui est confondu avec le représenté. Une confusion délibérée donc, qui transparaît ainsi à chaque ligne, avant de venir aussi s'accomplir dans la complète absence d'une terminologie "combinatoire" pour le vocabulaire des mathématiques usuelles et opératoires (livres, manuels, articles), qui fait preuve sur ce point d'une effarante imprécision quant au registre véritablement concerné. Ainsi, de "terme" ou de "membre" (d'une équation), d' "expression", de "couple", ou encore de "formule", qui peut renvoyer indifféremment dans le même texte (!) au contenu (un résultat, le plus souvent universel) mais aussi à la forme (une concaténation de signes). C'est la raison pour laquelle nous avons sur ce point évité l'emploi, aujourd'hui usuel mais ambigu, de l'expression "formules bien formées" (w.f.f) [8] et proposé à sa place un ensemble de deux termes: d'abord celui de *Forme* dans le registre combinatoire, non seulement en hommage à Leibniz et à sa Doctrine abstraite des Formes , mais aussi et surtout pour sa connotation strictement combinatoire. Convenablement interprétée dans le registre des significations, la Forme pourra ensuite fournir (par exemple) un *canon*, c'est-à-dire une propriété universellement valide. Le terme canon [9], aujourd'hui bien oublié, était au contraire fort usuel au XVIIe siècle, particulièrement chez Leibniz (qui voulait dresser des "tables de canons") pour désigner ce qu'on appelle de nos jours un "résultat général", ou encore, à nouveau, une "formule". Ainsi le doublet Forme-canon viendra-t-il à l'explication, chacun dans son registre, là où le langage usuel ne reconnaît qu'un seul terme, de surcroît vague, comme "formule" ou, comme chez Frege, "expression" (*Ausdruck*) [10]. On peut de la même façon s'interroger sur la signification usuelle exacte du terme "couple": s'agit-il d'une substance (ensemble ordonné de deux réels par exemple), ou bien d'une certaine concaténation de signes

---

8 *well formed formulas.*

9 Il demeure dans certaines acceptions anecdotiques de l'adjectif "canonique": forme canonique (d'un polynôme du second degré), ou injection canonique (de A vers B, où A est un sous ensemble de B).

10 Nous suivons ici les indications de sa traductrice Claude Imbert : Gottlob Frege,*Ecrits logiques et philosophiques*.op.cit., page 18.

construite autour d'une virgule [11]? Le vocabulaire usuel des mathématiques suscite ainsi à l'évidence un nombre considérable de semblables situations, et nous nous sommes ici donnés pour tâche de pallier dans un certain nombre de cas le manque de termes spécifiques en provenance du registre combinatoire. Ainsi du couple de parenthèses rondes, ouvrante et fermante, qui est effectivement un signe de l'écriture symbolique mathématique, et sera par nous diversement dénommé, selon le registre: signes de *délimitation* (ou Délimitants) dans leur fonction combinatoire de jalonner le texte symbolique, signes d'*agrégation* dans leur fonction signifiante de constituer des blocs de termes qui doivent être calculés ensemble. Comme d'ordinaire, le lexique usuel ne connaît ici que le terme du registre signifiant : agrégation (Leibniz dira *comprehensio*). Or la division signifiant-signifié nous paraît indispensable à toute analyse épistémologique et historique, ce dont nous prenons maintenant des exemples.

Le signe $+$ a eu -et a encore- des significations bien diverses, qui présentent des similitudes et des différences: comment les décrire, les analyser, et les comparer si on le désigne du terme "signe d'addition", comme l'usage en est courant? De telles dénominations fautives ont en vérité pour conséquence principale d'assigner au registre des significations une place exorbitante et en même temps faire disparaître complètement, à la fois l'indication de la *matérialité* du signe (ses symétries par exemple, ou le fait qu'il n'est ni littéral ni numérique), ainsi que sa *syntaxe combinatoire* (il crée deux places, avant et après lui, dans la ligne du texte et qui sont destinées à être occupées par des Lettres ou des Chiffres. Des règles qui le distinguent ainsi des parenthèses par exemple). *Mutatis mutandis,* les mêmes critiques vaudront évidemment pour la caractérisation d'un prétendu "signe d'égalité". Nous opèrerons alors ici en commençant, ce qui est primordial, par *dénommer* le signe, c'est-à-dire le représenter dans l'écriture rhétorique. Ce sera ici la *croix* (ailleurs, les deux-traits, ou la barre). Puis nous organiserons ce que nous appellerons un concept combinatoire, repéré par une majuscule, ici donc la Croix, et qui est exactement constitué de ce couple : un signe et sa syntaxe combinatoire.

Nous revenons à nouveau en terminant sur notre choix des termes. Nous en avons d'abord construit certains en décrivant la géométrie des signes (la *Croix* ou les *Deux-traits*). Nous en avons ensuite emprunté, surtout à Leibniz, le plus qu'il

11 Nous prendrons ci-dessous l'option substantielle.

nous a été possible dans ce registre: *combinatoire*, *Forme*, *charactéristique* par exemple ; aussi à Bourbaki [12] (comme *assemblage*). Pour le reste, et devant le manque structurel d'un vocabulaire usuellement associé à ce niveau de l'écriture, nous en avons, soit simplement recherché dans le vocabulaire courant, les plus intuitivement appropriés selon nous, que nous avons souvent dotés d'une majuscule qui distingue leurs acceptions symboliques mathématiques de celles usuellement reçues - *Délimitants* et *constitutifs* par exemple, ou encore le *lieu* (d'un signe), distingué des *places* (*ouvertes* par un autre signe) dans la *Ligne* du texte, le *renseignement* (d'une Forme). Un usage des majuscules qui nous a aussi permis -comme c'est usuellement le cas dans la création de termes neufs par les mathématiciens- d'utiliser des mots simples, évitant ainsi la production obligée d'un nombre considérable de néologismes, comme ceux du vocabulaire de l'informatique théorique, qui pourrait pourtant être ici d'un certain secours. Il en est résulté un lexique spécifique du registre combinatoire qui nous a donc semblé, d'une part très nécessaire à notre projet épistémologique, d'autre part le plus simplement approprié à nos descriptions; il apparaît dans l'index des sujets, placé à la fin de la présente thèse. Sur le plan de l'épistémologie générale, nous avons introduit les concepts et les termes, à nos yeux cruciaux, et en tous cas nécessaires dans cette thèse aux développements de sa seconde partie, de "procédure", de "substance", et d' "objet" (mathématique) d'une Forme renseignée, après les avoir brièvement replacés par rapport aux concepts fregiens de "sens" et "dénotation."

Une remarque terminale viendra davantage préciser notre méthode et notre projet dans cette thèse. On pourrait être surpris de ce que nous ayons fait coïncider la fin de la constitution de l'écriture symbolique avec la *Géométrie* de 1637, et non pas avec l'élaboration des premiers langages formels, dans la *Begrisschift* de 1879 ou les *Principes de l'Arithmétique* de Péano de 1889. Une première réponse est d'ordre strictement historique : à notre sens, tous les éléments constitutifs véritablement décisifs de l'écriture symbolique étaient en place dès 1637, même si la théorie n'en était pas faite, et ne viendra qu'aux XIX^e et XX^e siècles. Durant deux siècles et

12 Bourbaki est l'un des rares mathématiciens qui tente une analyse partielle de la question: son souci de formalisme l'entraîne cependant à des constructions terminologiques et conceptuelles complexes qu'on peut juger nécessaires quant il s'agit de construire une théorie, formalisée et non contradictoire, des principes de l'écriture mathématique, mais certainement inutiles à nos yeux s'agissant en premier lieu de décrire la réception d'un appareil symbolique neuf au XVII^e siècle. Incompréhensibles pour un non initié, les légitimes précautions constitutives que prend Bourbaki dans sa construction (par exemple dans le rôle des parenthèses) ne sont de surcroît en aucun cas expliquées, ce qui renforce l' effet d'opacité.

demi, les géomètres ont donc largement continué d'inventer -ce qui nous intéresse ici- sans se référer à une théorie alors inexistante de l'écriture symbolique. Semblablement, nous n'avons, dans cette thèse, ni cherché à définir avec précision dans le cadre d'une théorie elle-même mathématisée [13] les termes "combinatoires" que nous avons introduit et employés, ni davantage utilisé la conceptualisation aujourd'hui existante de la théorie des langages formels, tâchant ici d'abord d'éviter un discours circulaire : quel sens y aurait-il en effet à proposer de détailler avec précision la constitution et le fonctionnement de l'écriture symbolique mathématique, si l'on fait en même temps un usage discrétionnaire et non critique de cette même symbolique? La même réserve nous a par exemple empêché d'utiliser -à titre explicatif- la notation indicielle, avant de l'avoir préalablement analysée. Même avec ces précautions, nous ne sommes d'ailleurs pas certains d'avoir toujours pu nous tenir à l'écart d'une certaine circularité.

Nous revenons *in fine* sur notre projet de description des relations entre écriture symbolique et invention, replacé en regard des conceptions contemporaines des langages formels. Ceux-ci visent en effet à donner un cadre juridique moderne, adéquat et "définitif" à ce qu'on a ici appelé l'écriture symbolique des mathématiques. Dans ces conditions, leur histoire, tout comme leurs développements contemporains, sont aujourd'hui constitués comme disciplines à part entière, dont l'analyse épistémologique est pleine d'intérêt. A notre connaissance cependant, les théories des langages formels n'apportent que bien peu d'éléments à une analyse authentique des rapports entre le combinatoire et l'invention mathématique, une description que nous avons pour notre part tâché d'entreprendre dans la seconde partie de cette thèse. Une entreprise certes difficile, qu'on pourrait juger insaisissable, et dont nous ne pensons être arrivés à l'éclairer que sur des points bien limités. Si peu cependant que nous y soyons parvenus, c'est à notre sens, parce qu'en dehors de tout formalisme mathématique, nous avons tâché de ne faire ici usage que de la langue naturelle. Les théories formalisées, pour strictement indispensables qu'elles soient à l'effet de fixer la connaissance à un moment historique donné, sont à notre sens, étrangères par essence à l'analyse des procédures véritables de création d'objets, telles qu'on les décrit ci-dessous, par exemple dans la

[13] Notre objectif n'est pas davantage de reconstruire après Frege le concept de wff (et de l'ensemble de toutes celles-ci), mais seulement d'indiquer comment les rapports croisés entre combinatoire et significations ont contribué - et contribuent encore - de façon décisive à l'invention mathématique.

correspondance de Leibniz avec Tschirnaus (cf.13.2.3.a) sur l'examen visuel de la Forme:

$$\sqrt[n]{a + \sqrt[n-1]{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt[n-1]{b}}$$

ou chez Euler et son

$$\cos(z)$$

(cosinus d'un nombre complexe. cf. 14.5), ou bien encore chez Laurent Schwartz avec les dérivées de fonctions non dérivables (*idem*). Ces trois innovations profondes s'expriment certes dans le cadre syntaxique d'un langage formel, mais la connaissance de celui-ci, même exhaustive et détaillée, ne fournit aucun renseignement sur le pourquoi et le comment de semblables créations. Ainsi, pour décrire la constitution de l'écriture symbolique, comme pour tâcher de cerner les procédures de l'invention mathématique, la langue naturelle, celle de la philosophe et de la littérature, nous a-t-elle paru constituer le meilleur outil (à vrai dire, pour nous, le seul). Une défense et illustration de la langue naturelle qui va, à l'évidence, exactement à l'inverse de tout projet d'écriture symbolique des concepts, celle de la Charactéristique, comme celle de l'idéographie.

Première partie :
Le système.

Chapitre 1

Ecriture rhétorique, écriture symbolique.

1. Ecriture rhétorique, écriture symbolique.

2

1.1. Préliminaires .

"Et de nos jours, fleurit un certain genre d'arithmétique, qu'on nomme Algèbre, qui accomplit touchant les nombres ce que les Anciens faisaient touchant les figures [1]." Telle est, dans la Règle IV des *Regulae*, la courte appréciation de Descartes sur les notations algébriques, qui servira d'introduction à la constitution de l'écriture symbolique mathématique.

Point essentiel en mathématiques, en droit et en fait, (ce dont tout mathématicien professionnel peut témoigner), la question de l'écriture mathématique est néanmoins évacuée, comme subalterne, dans une quasi-absence d'études épistémologiques. Tâchant de mettre à jour les motifs de cette désaffection, on se heurte très vite à cette conception implicite que les objets mathématiques étant supposés idéaux, peu importeraient des représentations contingentes. Sans entrer pour le moment dans la question corrélative d'un statut pour les "idéalités" mathématiques, notons que cette position platonicienne implicite -la contingence des représentations- gagnerait à tout le moins à être explicitée.

1.2 Le moment de la coupure.

Nous avons été personnellement introduit dans l'histoire des signes par la simple mise en regard de deux textes mathématiques : d'une part, un extrait de l'*Ars Magna* de Cardan, archaïque, illisible pour nous, et cependant très représentatif du XVI^{e} siècle mathématique

operationis. Probatio eſt, vt in exemplo,
cubus & quadrata 3. æquentur 21. æſtima-
tio ex his regulis eſt, ℞. v. cubica 9½ p̃.
℞. 89¼ p̃. ℞. v. cubica 9½ m̃. ℞. 89¼ m̃.
1. cubus igitur eſt hic conſtans ex ſeptem
partibus,

---

1 Règle IV, in *Règles utiles et claires pour la Direction de l'esprit,* traduction de J.L. Marion. 373, 15 - 17, ci-dessous dénommé *Regulae.* Les références seront conformes à sa numérotation : numéro du paragraphe, suivi de celui de la ligne.

Les abréviations utilisées pour les ouvrages fréquemment cités sont indiquées lors de leur premier usage, et rappelées à l'Index en dessous du nom de l'auteur.

[2] et de la *Géométrie* de Descartes, d'autre part, de facture quasi-moderne, le premier texte dans l'Histoire des Mathématiques, directement lisible aujourd'hui :

> ſeroit plus longue que ſon diametre. Ce qui ſeroit cauſe que les deux vrayes racines de cete Equation ne ſeroient qu'imaginaires, & qu'il n'y en auroit de reelles que la fauſſe qui, ſuiuant la reigle de Cardan, ſeroit[a]

$$\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q+\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}+\sqrt{C.\,\tfrac{1}{2}q-\sqrt{\tfrac{1}{4}qq-\tfrac{1}{27}p^3}}.$$ [3]

Avec plus de précision, on distingue le moment historique de fracture entre 1591 (l'*Isagoge* [4], de Viète), et 1637 (la *Géométrie* de Descartes [5]). Après 1637, certes le texte se modifie et se perfectionne, mais il a définitivement acquis les traits constitutifs de sa forme actuelle, autorisant ainsi les développements et les raffinements de l'écriture mathématique contemporaine.

---

2 Extrait de la page 255 de l'*Ars Magna*, de Jérôme Cardan, dans la réédition du tome IV de ses Oeuvres. Lyon. 1663. Le premier paragraphe s'interpréte ainsi en termes post-cartésiens : la preuve est comme dans l'exemple : $x^3 + 3.x^2 = 21$. Selon ces régles, le résultat est :

$$\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89\frac{1}{4}}}+\sqrt[3]{9\frac{1}{2}-\sqrt{89\frac{1}{4}}}-1$$

La s suite de la page est consacrée au détail de l'élévation au cube du nombre précédent. Elle sera donné *in extenso* et commentée en annexe du 1.5.

3 Règle de Cardan pour les équation cubiques, chez Descartes, A.T, VI, 473. Les extraits des oeuvres de Descartes seront désignés par la référence (A.T.) aux douze volumes de l'édition Adam-Tannery, (Vrin. Paris), suivi de l'indication du numéro du volume et des pages.

4 Nous abrégerons de la sorte le titre complet de l'ouvrage : *In artem analyticem Isagoge sursim excussa ex opere restitutae mathematicae analyseos seu Algebra nova*. T. Mettayer. Tours. 1591. Nous utiliserons aussi, le plus souvent, la traduction française de J. L. de Vaulézard (1630) : *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète, précédée de l 'Introduction en l'Art Analytique*. Réédition en *fac simile* in Corpus des oeuvres de philosophie en langue française. Fayard. Paris 1986. Le texte de Vaulézard, référé *Isagoge*, contient, outre l'*Introduction à l'Art Analytic* proprement dite (*Isagoge*), les *Cinq Livres des Zététiques*, traduction française de *Zeteticorum libri quinque*. Tours. J. Mettayer. 1593. Ces deux textes sont pratiquement les seuls à avoir été publiés du vivant de leur auteur.

5 Chez Descartes même, on peut, plus précisément encore, le situer entre 1619 (les *Cogitationes Privatae*) et 1637 (la *Géométrie*). Cf. nos deux études : SERFATI M., *Naissance de l'écriture symbolique mathématique, de Descartes à Leibniz* in *Calculemos... Homenaje al Profesor Miguel Sanchez-Mázas*. Ed. Trotta. Madrid. 1996, référencée sous : SERFATI M., *Naissance...*, et SERFATI M., Regulae *et Mathématiques*, in *Theoria* - Segunda Epoca - Vol IX, N° 21, 61- 108. référencée SERFATI, *Theoria*.

Comment et pourquoi pareil bouleversement? On se trouve ici, situation insolite en des temps historiques, au moment de la création d'une langue écrite : la langue mathématique, avec abondance de texte et d'auteurs. Comment : c'est-à-dire en quoi précisément, dans la matérialité du texte, réside ce que nous reconnaissons aujourd'hui, entre Cardan et Descartes, comme des différences majeures? A cette question, la présente étude propose des réponses à la fois historiques et épistémologiques : ainsi analyserons-nous le passage historique progressif entre une écriture "grecque" des mathématiques, purement rhétorique, c'est-à-dire inscrite dans la langue commune, où tout se dit et se calcule en mots, à une écriture symbolique où le texte est presque réduit à une concaténation de signes (lettres, chiffres, ou signes figurés), qu'il est d'abord nécessaire de déchiffrer, puis d'interpréter selon des règles syntaxiques et sémantiques prescrites. La *Géométrie* de 1637 est à cet égard le premier des textes rédigés en écriture symbolique [6].

1. 3 Problèmes et Théorèmes dans la mathématique grecque.

Depuis l'antiquité grecque, la nature des questions mathématiques étudiées, tout comme leurs procédures de résolution, avait fait l'objet de divisions de diverses sortes. A côté de la classique (méta-) distinction entre méthode analytique et méthode synthétique, relative aux modes de résolution [7], avait été posée, en

6 A. T., VI, 367-485.

7 Les deux termes étaient curieusement pris à l'époque dans des sens à peu près inverses de ceux dont nous usons aujourd'hui. Il est vraisemblable que ce glissement et cette inversion de sens se soient produits au XVII^{e} siècle, du fait en particulier de l'autorité de Descartes. Dans les premières *Regulae* en effet, la *Mathesis* cartésienne est presque co-extensive à l'Analyse, et Descartes, qui a défendu avec une particulière conviction la méthode analytique, se sent si profondément novateur qu'en une démarche quelque peu forcée, il éprouve le souci de s'inscrire sur le sujet dans une tradition : il tente en effet de tirer à lui, du côté de l'Analyse telle qu'il la conçoit, la géométrie et la mathématique grecques. Or, en dépit de son nom, l'Analyse des anciens procédait le plus souvent par ce que nous appelons aujourd'hui synthèse, c'est-à-dire par constructions successives progrédientes à partir des données : la méthode analytique, qui ne se rencontrait que bien plus rarement, consistait à supposer le problème résolu et la figure déjà faite : ultérieurement comparée à l'Algèbre, elle ne pourra avoir que des usages bien limités. Cf notre analyse dans SERFATI, *Theoria,* pages 72- 73. Ce que commente GILSON : "C'est cette impossibilité d 'inventer par voie synthétique qui a conduit Descartes et Viète à supposer que les anciens géomètres se sont servi de l'analyse pour découvrir leurs théorèmes, mais l'ont volontairement dissimulée en exposant synthétiquement des résultats qu'ils n'avaient pu découvrir par cette voie." (*Discours de la Méthode.* Vrin. Paris. 1962, p195). Cf aussi CHASLES, *De la Géométrie chez les Grecs,* in *Traité de Géométrie Supérieure,* 550-560. Gauthier Villars. Paris. 1880.

premier lieu, la division, usuelle dans la géométrie grecque, et développée par Proclus dans son commentaire du Livre I des *Eléments* [8], entre problèmes et théorèmes. Dans les faits, cette catégorisation se référait à une certaine quantification : procédures générales ou universelles d'un côté, particulières ou existentielles de l'autre. Les questions universelles, ou théorèmes, visaient à l'affirmation d'une propriété générale valable dans toutes les situations : montrer par exemple que dans tout triangle les médianes sont concourantes ou bien encore que "le quarré de tout binôme est égal à la somme des quarrés augmenté du double du rectangle". Au contraire, les questions spécifiques, ou problème, requéraient la détermination de grandeurs ou de nombres particuliers inconnus satisfaisant à certaines propriétés spécifiées. Par exemple : déterminer une grandeur telle que si on la multplie par deux et si on ajoute trois au résultat, on obtient le carré de la même grandeur. Aux problèmes était donc organiquement attachée une démarche inquisitoriale.

1. 4 Euclide et la géométrie classique. L'écriture rhétorique des mathématiques.

Dans l'antiquité cependant, une autre division avait été depuis longtemps établie entre géométrie d'une part et "logistique" -ou calcul- d'autre part. S'agissant de la géométrie grecque, une brève analyse du texte chez Euclide, à partir d'un exemple, fera apparaître (Chapitre 2.) ces trois conclusions sans surprise : d'une part, sur le plan de la forme, ici essentiel, le texte euclidien, son énoncé comme ses preuves, était entièrement rédigé en langue naturelle et ne comportait aucune représentation symbolique véritable. D'autre part, quant au contenu, il traitait, pour l'essentiel, de questions universelles. Enfin, que la question donnée concernât des êtres géométriques ou des nombres, ses preuves étaient uniquement géométriques.

---

8 Proclus argumente ici longuement. Cf VER EECKE P. *Proclus de Lycie, Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide* 69 - 73.Desclée de Brouwer. Bruges. 1948. La catégorisation n'est en effet pas toujours allée de soi : les Anciens "ont voulu appeler toutes ces choses d'abord des problèmes ; car ils estimaient que l'appellation de théorèmes convenait plus que celle de problèmes aux sciences contemplatives qui dissertent d'ailleurs sur des choses éternelles." (page 69). Cependant, conclut Proclus, "il y a des problèmes et des théorèmes géométriques en raison de ce que la spéculation l'emporte en géométrie" (page 70). Voir aussi le commentaire de HEATH dans EUCLID.*The Thirteen Books of The Elements*, Volume 1, 124-125. Dover. New-York.Ed. 1956. L'ouvrage sera désigné dans la suite comme HEATH, *Euclid*.

Le texte mathématique euclidien était ainsi fait pour être lu, compris et appliqué dans le seul cadre de la langue naturelle, en dehors de toute représentation symbolique à partir de celle-ci. Il est le modèle de référence d'une écriture des mathématiques, dite rhétorique, qui fut dans les faits presque coextensive à la mathématique grecque classique. Le champ de ses lecteurs possibles - la communauté tout entière - ne s'organisa donc pas autour de conventions, nécessaires à toute représentation, autres que celles découlant des relations naturelles de signifiant à signifié dans celle-ci. Il s'inscrivit donc dans le droit-fil des activités intellectuelles des hommes du temps. Ainsi, des siècles durant, au travers des transcriptions grecques ou latines, puis, à partir du milieu du seizième siècle [9], de traductions dans les langues communes européeennes, le texte euclidien demeura-t-il le modèle incontesté de la rigueur, auxquels se référaient les géomètres : au XVIIe siècle en Europe, le schème de la géomètrie euclidienne et, corrélativement, de l'écriture rhétorique des mathématiques montrait encore sa pleine vigueur et toute sa force de modèle. Au fil des sections qui suivent, nous décrirons néanmoins les limitations inhérentes à cette forme de texte mathématique, qui, dès le temps d'Euclide, avait trouvé, en même temps que sa forme achevée, un champ d'action indépassable.

1. 5 Géométrie et logistique. Ecriture symbolique.

A côté de la géométrie, et depuis la tradition égyptienne dont les Grecs s'étaient faits héritiers, deux autres types d'activités mathématiques étaient reconnues sous le commun titre de "logistique" (ou science du calcul)[10]. D'abord, l'activité simple, de toutes la plus ancienne, de l'effectuation d'opérations explicites portant sur des nombres donnés. Reprenant le terme de Viète (qui l'avait emprunté à la tradition grecque de Platon), nous désignerons, dans la suite, cette activité par "logistique numéreuse" ou "calcul numérique". Par opérations, on entendit d'abord les "quatre opérations" usuelles : addition, soustraction, multiplication, division[11]. Selon les auteurs, on pouvait y ajouter l'extraction de

---

9 La première traduction imprimée des *Eléments* en une langue moderne (l'italien) accompagnée de commentaires, est due à N. Tartaglia: *Euclide Megarense* (Venise, 1543). Tartaglia fut aussi l'un des premiers éditeurs en Europe des oeuvres d'Archimède : *Opera Archimedis.* Venise, 1543. Aussi *Archimedis de insidentibus aquae.*Venise 1565.

10 λογιστική

Cf. HEATH T. (1921), *A History of Greek Mathematics.*Dover. New-York. 1921. Ed 1981. Vol. II, (*From Aristarchus to Diophantus*), Chapitre 20. L'ouvrage sera référencé comme HEATH, *Greek., I ou II.*

11 Ce sens vient de Platon dans le *Charmides,* 165 E.

racines, carrées ou cubiques, ou d'ordre supérieur. Par nombre "donné", on désignait un nombre entier ou rationnel explicité (une "fraction"), parfois aussi un nombre "en général", ce qu'on appelle aujourd'hui un nombre réel. Nous ne discuterons pas ici la diversité des conceptions quant aux grandeurs et aux nombres qui y furent successivement attachés, pour nous consacrer à la seule question des représentations, qui porta à la fois sur les nombres et les opérations.

Au chapitre des opérations, on n'observe ici guère de représentations véritables, en Europe, avant la fin du XV^e^ siècle (Cf. ci-dessous 4.1 : *La croix et le trait)*. La raison en est simple: s'agissant de transcrire sur la feuille ou l'abaque la multiplication de deux nombres explicités (et de deux seulement), la représentation des nombres et du résultat suffisait à tout expliquer. La représentation des nombres reçut par contre des solutions très diverses, pour la base de numération (sexagésimale, duodécimale, décimale) et les signes employés. Nous ne nous attarderons pas sur les systèmes de numération sujet abondemment développé dans la littérature spécialisée, en particulier par Cajori et Guitel [12], et retiendrons seulement ces deux étapes historiques essentielles : chez les Grecs à la période classique [13], c'est l'alphabet ordinaire qui fut utilisé à la représentation des nombres entiers. C'est ainsi que l'assemblage de lettres :

ε M, δ ω β γ

était interprété comme l'entier qui, dans le système décimal, s'écrit aujourd'hui 54823 [14].

Selon HEATH T. (1921), II, 440 : " le scoliaste du *Charmides* de Platon", 165 E dit que des "parties de la λογιστική, la science du calcul, sont les méthodes grecques et égyptiennes de multiplications et de divisions et les additions ou soustractions de fractions. "

12 GUITEL G, *Histoire comparée des numérations écrites*.Flammarion. Paris.1975.

13 Un système bien peu commode, comme le note CAJORI, I, 23 - 26 : il employait en effet un nombre élevé de signes (trente quatre), dont des lettres anciennes inusitées, aussi parfois un *vinculum* surlignant, pour distinguer le texte mathématique du texte ordinaire. Il était cependant venu remplacer à la période classique le système archaïque de représentation des entiers, dit aujourd'hui Hierodianique, qui a semblé rétrospectivement bien mieux adapté. Au XVI^e^ siècle encore, un petit nombre de copistes continuaient d'employer le système grec de représentation des nombres. (Cf. CAJORI, I, 26)

14 M représente 10000 dans le système décimal et ε, cinquième lettre de l'alphabet l'entier 5, de sorte que ε M représente 50000 (on rencontrait aussi M ε). La virgule était une séparatrice, δ
8 interprété comme 4, ω comme 800, et γ comme 3. D'autres exemples, avec une table de conversion, se trouvent dans CAJORI, I, 25. Cf aussi GUITEL, op.cit,Tableau 13, page 243.

D'un autre côté, aux quatorzième et quinzième siècles européens, en point d'achèvement d'une histoire confuse, le système de représentation décimal par chiffres indo-arabiques prévalait partout en Europe. Une question brièvement développée ci- dessous en 3.6 : Chiffre et chiffres.

Une autre tradition grecque, d'Eratosthène à Diophante, s'était consacrée à des questions, elles aussi purement numériques, d'une autre nature cependant : la recherche de nombres entiers ou rationnels inconnus, tels certains nombres premiers, ou encore l'établissement de théorèmes d'arithmétique, qui ne nécessitaient, ni pour leur représentation, ni pour leur résolution, aucune figure géométrique.

Cette activité arithmétique était bien connue depuis la tradition égyptienne et ce qu'on appelait le "Calcul de Hau" [15]; elle se perpétua chez les Grecs à l'époque classique sous une forme semblable, par les épigrammes mathématiques [16]. On verra au Chapitre 3, comment Diophante fut le premier à en modifier les règles du jeu, introduisant une véritable représentation symbolique de la chose inconnue (un nombre entier le plus souvent). Sept siècles après Euclide, Diophante, était un "calculateur", aux préoccupations et aux méthodes bien différentes de son prédécesseur. Sur le fond, Diophante s'occupa d'Arithmétique, et aussi de questions accidentelles. Sur le plan de l'écriture, il fut le premier à introduire une représentation partiellement symbolique. Dans sa codification de l'inconnue, il fut suivi par des algébristes médiévaux (Cf. ci-dessous : *L'Inconnu et ses signes*, Chapitre 3). Il s'en suivit une ébauche d'écriture symbolique, une forme de calcul qu'on a pu dire littéral, puisque la chose inconnue y fut souvent représentée par une lettre (ce ne fut pourtant pas toujours le cas). Nous ferons référence à cette activité, depuis l'antiquité grecque, jusqu'au milieu du XV^e^ siècle, par le terme générique de logistique, que nous préfèrerons à celui d'algèbre, évidemment anachronique. L'algèbre des Arabes fit en effet son apparition en Europe au XVe siècle seulement, par le truchement des mathématiciens italiens. La science des équations devint alors un objet d'étude autonome, détaché de son antique représentation géométrique. L'Ecole Italienne du XVIe siècle (Del Ferro- Tartagalia- Cardan- Bombelli) reprit en Europe de manière brillante la question des équations [17]. Dans ses premiers

15 HEATH, *Greek*, II, 440

16 Cf. HEATH, *Greek*, II, 441

17 Cf. notre article : *Tartaglia versus Cardan. Le secret et la Règle.* in *Actes du Séminaire de Philosophie et Mathématiques*, de l'Ecole Normale Supérieure. N° 96. Séance du 11 Mai 1992. Publication de l'Université Paris XIII.

développements, l'algèbre permit donc de traiter par le calcul des questions auparavant justiciables de la seule preuve géométrique, telles les équations du second degré : elle se trouva donc définitivement concerner à nouveau des nombres, non plus cependant des nombres entiers ou rationnels comme dans l'arithmétique de Diophante, mais des nombres quelconques, rationnels, ou irrationnels quadratiques simples comme $\sqrt{2}$. Au XVII^{e} siècle, les termes "algèbre" et "calcul" étaient devenus synonymes. [18] A la fin du XVI^{e} siècle, comme dans l'*Isagoge* de Viète, les questions mathématiques étaient donc classiquement réparties selon ces deux modes fondamentaux : géométrie et calcul, qu'on dénommait aussi problèmes "en lignes" et "en nombres". Une division qui recouvrait en réalité des territoires d'importance très inégale : la géométrie occupait la part du terrain à la fois la plus vaste et la plus intéressante. Elle demeurait un incontestable modèle de rigueur, dont les solutions et les méthodes étaient partout reconnues comme les seules achevées. Les mathématiciens d'aujourd'hui ont quelque mal à imaginer la position dominante et l'importance conceptuelle majeure de la géométrie à cette époque. Rappelons la persistance de l'expression "géométre" pour désigner, à la fin du XIX^{e} siècle encore, tout mathématicien véritable. Nous analysons ci-dessous (*Viète et l'Indéterminé.* Chapitre 7) les fondements épistémologiques d'une telle suprématie, qui ne se réduisent aucunement à la fidélité à la tradition d'Euclide. Au XVI^{e} siècle cependant, l'algèbre de l'Ecole italienne -essentiellement par l'*Ars Magna* de Cardan (1545) et l'*Algebra* de Bombelli (1572)- fit une place chaque jour plus importante à la science des équations. Dans les dernières années du siècle (1591- 1596), l'oeuvre de Viète fut décisive pour inverser les rapports de force entre géométrie et calcul.

1.6 Les premières représentations symboliques.

Entre Euclide et Diophante, le dernier des grands mathématiciens grecs, sept siècles s'écoulèrent, qui séparèrent aussi, dans l'écriture mathématique, la pure rhétorique d'avec l'avènement de la première symbolique. Outre sa codification de l'inconnue, Diophante introduisit en effet des représentations pour les

[18] Viète, qui use volontiers du terme logistique, voudra distinguer la Logistique *Numérique* - ce que nous avons appelé calcul numérique - de la *Spécieuse*, c'est-à-dire sa nouvelle algèbre, qui traite des *espèces* : "Le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nombres, la Spécieuse par espèces ou formes des choses : comme par les lettres de l'Alphabet." *Isagoge*, op. cit, début du Chapitre III (en réalité, Chapitre IV).

puissances (Cf. Chapitre 8 : *Puissances. De Diophante à Viète.*), pour la soustraction, et aussi les premiers des signes d'agrégation. [19]

On n'observe ensuite aucune véritable modification dans la structure de la représentation, avant le milieu du XVI[e] siècle (Recorde) et surtout sa fin (Viète). Durant tout le Moyen Age en effet, les mathématiques de la logistique continuèrent d'être écrites, soit de façon presque entièrement rhétorique, comme chez Léonard de Pise ou Luca di Borgo, soit par une ébauche d'écriture symbolique qui prolongeait aux nombres "en général" les techniques (et aussi les insuffisances) des représentations diophantiennes pour les nombres entiers. Aucun système général de représentation ne fut publié à cette époque qui s'imposât à la communauté des calculateurs (ce ne fut chose faite qu'à la fin du XVII[e] siècle), et cette situation se prolongea durant la période médiévale et une partie de la Renaissance. A la fin du XV[e] siècle, avec l'introduction de l'imprimé, les représentations de l'inconnue, de son carré, de l'addition, etc..., dans le droit-fil des techniques diophantiennes, devinrent usuelles chez les calculateurs, tout en demeurant le plus souvent singulières, valides dans l'oeuvre d'un seul auteur. D'où, à cette époque, une incroyable floraison de représentations insolites et de tentatives avortées, minutieusement inventoriées par Cajori. Dans cette multiplicité, on distinguera deux écoles qui réalisèrent, avec le temps, et chacune pour son compte, une certaine unification autour de systèmes de représentations : d'une part l'école allemande (ou cossique), dont le texte majeur est sur ce point la *Coss*, de Christoff Rudolff [20] (1525), l'école des algébristes italiens du XVI[e] siècle d'autre part, dont le texte le plus représentatif est certainement l'*Ars Magna* de Jérôme Cardan (1545), qui se distingue du cossique, en dehors de toute modification de structure, par un emploi élargi de signes alphabétiques. Les signes cossiques seront pour partie analysés (8.4. *Analyse du système cossique)*, ainsi que ceux de Bombelli pour l'école italienne (8.5 : *Le système de Bombelli)*.

---

[19] Diophante n'use cependant pas de représentation symbolique, ni pour la multiplication, ni pour la division. L'addition est indiquée par une simple juxtaposition. Cf. HEATH, *Greek*, II, 458- 459.

[20] Nous abrègerons ainsi le titre de l'ouvrage de Rudolff, *Behend und Hübsch Rechnung durch die kunstreichen Regeln Algebre so gemeincklich die Coss genent werden*, paru à Strasbourg en 1525. Une édition nouvelle fut publiée en 1553-1554 à Königsberg par les soins de M. Stiefel. L'ouvrage est surtout une compilation intelligente, la première en allemand, de diverses "algèbres " qui existaient en manuscrits. Cf. CAJORI, I, 133.

1.7 Les éléments de la représentation symbolique.

Dans les divers chapitres de cette première partie, nous nous attacherons d'abord à une brève description du texte euclidien (chapitre 2 : *L'écriture rhétorique des mathématiques).* Nous examinerons ensuite les représentations proposées par les géomètres ou les calculateurs pour divers concepts mathématiques : d'abord, les représentations du Requis (la ou les inconnues : chapitre 3 *L'Inconnu et ses signes*), et du Donné (chapitre 7. *Viète et l'indéterminé*); aux côtés de ces deux catégories, antiques et fondamentales, on verra aussi apparaître dans l'écriture, à la fin du XVIe siècle, du fait de Viète, une troisième, proprement inouïe, le Donné indéterminé, qui, permit dès lors dans le calcul ce qui était jusqu'alors le propre de la seule géométrie : le traitement de données *arbitraires, mais fixées.* Une forme de contradiction assumée qui sera discutée en 7.5 (*L'écriture symbolique chez Viète).*

On traitera ainsi de la représentation des instructions opératoires : addition, division, extraction de racines par exemple (*Formes élémentaires.* chapitre 4). Une question qui est en fait indissociable de la séparation et de l'agrégation des signes dans le texte symbolique (parenthèsages, *vinculum*, etc... : *Signes délimitants et ambiguité de l'ordre.* chapitre 5). On mettra ainsi en lumière ce fait central : transcendant les simples prétentions de sa visée initiale (l'abréviation par signes pour éviter la répétition), la représentation symbolique permit dans les faits la conceptualisation d'une succession hiérarchisée complexe d'instructions opératoires, dont la description aurait été impossible en fait, sinon en droit, dans l'écriture rhétorique, dont on mesurera alors, rétrospectivement, les limitations intrinsèques, le cas des formules de Cardan pour l'équation du troisième degré étant ici éclairant. L'avènement de cette représentation permit ainsi la prise en compte et la résolution (par formules, ou canons) de questions mathématiques qui ne pouvaient, jusque là, pas même être conçues. En même temps s'organisa spontanément la rupture progressive avec l'écriture rhétorique, dont le maintien se révéla dans les faits intenable, dès que la hiérarchie des instructions contenait au moins deux niveaux.

Aux chapitres 8 et 9, on analysera la représentation de la "lignée" des puissances (carrés, cubes, sursolides, etc...). Au-delà des apparences, ce fut un problème majeur et peu simple : à tâcher de le résoudre avaient échoué, deux siècles durant, tout le système cossique ainsi que l'école italienne; sa solution définitive, actuelle, fut rapportée par Descartes.

Initialement, il était ici question de représenter la "répétition du même" (le carré, comme itération d'une même procédure), une problématique qui sera en fait subsumée sous celle de la représentation symbolique d'un concept mathématique considéré comme composé (*Concepts simples ou composés : la représentation des prédicats.* 8.4.4). La solution de Descartes (notation par exposants) fut en même temps une leçon de méthode pour tous ses successeurs, Leibniz en premier lieu. (*Le système de Descartes.* 9.1).

On traitera enfin de la représentation de l'adéquation - mise en relation par égalité -, qui fut résolue par Recorde et Descartes (*Adéquation et formes propositionnelles.* chapitre.6), dans chaque cas par l'introduction d'un signe spécifique, bientôt suivi par nombre d'autres, instituant ainsi un jeu de diverses mises en rapport. Instaurant dans le texte symbolique une structure relationnelle neuve, cette représentation mit définitivement fin à la structure prédicative de la phrase mathématique grecque.

De la représentation effective de ces divers concepts, se dégagea l'essentiel du système symbolique nouveau : leur codification achevée (autour de 1640) vient expliquer la profonde différence, ci-dessus notée, dans la matérialité du texte mathématique, entre les seizième et dix-septième siècles.

Pour représenter, les auteurs puisèrent d'abord dans le magasin général des signes alors constitué : alphabets grec et latin (majuscules et minuscules, impliquant différenciation), chiffres indo-arabiques, signes de ponctuation de la langue naturelle (parenthèses, points). Mais ils élaborèrent aussi un ensemble de signes neufs, figures symboliques mathématiques, que nous dirons Figures, et qui n'étaient pas alphanumériques, tels celles de Descartes ou de Recorde pour l'égalité, de Widman pour l'addition, le signe cossique 𝔵 pour l'inconnue. On notera enfin l'invention de signes diacritiques, tels le *vinculum*, comme signe d'agrégation.

1.8 L'origine des représentations.

On distinguera d'abord entre elles certaines des représentations, selon le caractère, nécessaire ou contingent, de leur emploi dans le calcul. La plupart furent contingentes, faisant en vérité suite à des siècles d'écriture rhétorique où elles n'avaient pas eu cours. L'égalité, par exemple, avait longtemps été évoquée de façon rhétorique seulement, à l'aide de *aequ.*, *aequari*, *faciunt*, *gleicht*, etc... De son côté, l'addition, longtemps ne fut pas représentée, mais seulement indiquée dans le texte par le *et* latin, tout comme la multiplication par le *in*. De même, pour les lignées de puissances, où les textes du XVI^e siècle font couramment état, de façon rhétorique seulement, du sursolide par exemple. Ainsi, même si elles étaient fort commodes, ces représentations pouvaient donc ne pas être : la décision de représenter l'égalité par les deux-traits (=), l'addition par la croix (+), le bicarré par a^4, fut donc initialement, pour Recorde, Widman ou Descartes respectivement, une affaire de pure convenance que le géomètre expliquait à l'occasion, dans le cours de son texte, invoquant le plus souvent un simple souci abréviatif, devant la répétition de certaines expressions : plutôt que de répéter inlassablement à chaque équation un *aequari*, Recorde par exemple décida d'utiliser l'abréviation commode dont nous usons aujourd'hui. De son côté, la représentation de Viète du Donné indéterminé, par des consonnes majuscules latines, était également contingente. Cette catégorisation fut largement remise en cause par ses successeurs, en particulier par Descartes.

De même, était contingente la représentation spécifique d'une grandeur inconnue, même si elle se montrait prodigieusement utile (on a dit qu'elle fut inaugurée par Diophante, alors que les épigrammes préalables s'en étaient dispensés). La représenter par le moyen d'un signe non numérique fut par contre, précisément parce qu'elle était inconnue, une nécessité qui s'imposa à tous, à seule fin de proscrire l'ambiguïté. Une nécessité ainsi inscrite dans la matérialité du texte : l'obligation de la différence. Il en fut pareillement de l'emploi des signes d'agrégation : comme on verra, il revêtit en premier lieu un caractère nécessaire, à la seule fin que le texte symbolique pût simplement être déchiffré sans équivoque. Cette nécessité provint donc à nouveau de l'intérieur du registre symbolique, et non plus d'une quelconque convenance de la part de l'auteur.

On en vient enfin à ces deux points cruciaux : l'arbitraire du signe et l'univocité de la représentation. D'abord, et quoiqu'il en fût du caractère, nécessaire ou contingent, de la symbolisation d'un concept, il était clair, aux yeux de son auteur que le signe lui-même, c'est-à-dire le support choisi pour la représentation, était arbitraire. Les raisons de faire choix de tel signe plutôt que de tel autre étaient de pure convenance; Descartes, dans deux textes célèbres [21], évoque seulement la commodité des signes "les plus courts qu'il lui sera possible". Une brièveté souhaitée, qui est une constante de la pensée de Descartes en matière de signes, et la seule exigence que, contrairement à Leibniz, il mettra jamais en avant.

D'un autre côté néanmoins, une autre règle d'or était l'univocité de l'interprétation, qui subsumait l'obligation de différence plus haut citée : à un même concept ou objet, toujours la même représentation ; à deux concepts ou objets distincts, deux signes distincts [22]. Ce principe de codification assurait, en sens inverse, au moment du déchiffrement, qu'à deux signes distincts, le lecteur devait associer deux interprétations différentes, et qu'un même signe devait toujours être interprété de la même façon. La deuxième règle venait donc aussi tempérer la première : le choix du signe était arbitraire, à condition qu'il ne fut pas déjà attribué.

Le champ d'application effectif de ces deux règles, au moment de l'interprétation, conduit aujourd'hui à distinguer rétrospectivement divers niveaux de contextes dans le calcul. Seule l'interprétation des chiffres indo-arabiques était indépendante du contexte : aux XV^{e} et XVI^{e} siècles, il était unanimement reconnu qu'ils représentaient ce qui est aujourd'hui l'écriture décimale d'un entier, ou d'un nombre réel. S'agissant par contre de signes littéraux, leur interprétation variait d'un auteur à l'autre : la signification du *z* comme nombre inconnu est vraie dans la correspondance de Newton et fausse dans le Descartes de la *Géométrie*. Chez un même auteur, l'interprétation pouvait varier avec le temps, ou d'un article à l'autre, et parfois à l'intérieur d'un même article, une faculté de variation toujours en vigueur

---

21 A la fois dans les *Regulae* et dans le *Discours*. C'est d'abord le texte même de la Règle XVI (*Regulae*, 454,10-15) : "Quant aux choses qui ne requièrent point l'attention d'un esprit qui y soit présent, même si elles sont nécessaires pour la conclusion, mieux vaut les distinguer par des chiffres très brefs que par des figures complètes : car ainsi la mémoire ne pourra être trompée, cependant que la pensée ne se distraira point à les retenir, lorsqu'elle s'adonnera à en déduire d'autres." Aussi dans le *Discours* : "quelques chiffres, les plus courts qu'il me sera possible." *Discours de la Méthode*, 2° partie, (A.T,VI,20).

22 Cf. ANDRE,op.cit,*Première Règle fondamentale*. § 419, 166 :

"Que le même signe représente toujours le même objet. Que deux objets différents soient toujours représentés par deux signes différents. (...) § 420 Les infractions à la précédente règle sont extrêmement graves..."

Seconde règle fondamentale. §425, 170 :

"Que le même objet soit toujours représenté par le même signe. Que deux signes différents représentent toujours deux objets différents. "

et, plus loin, § 469,189 :

"Deux objets analogues doivent toujours être représentés par deux signes analogues. Deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates."

aujourd'hui. Cette question essentielle sera traitée dans le détail en 7.6 (*Après Viète : les Clés d'interprétation).* Si le contexte de validité des significations des Lettres demeura donc assez étroit, celui des signes d'agrégation et des signes opératoires se stabilisa par contre avec le temps, en sorte qu'à la fin du XVII[e] siècle tout au moins, le contexte de validité de l'interprétation de la croix comme étant ce qu'on appelle de nos jours la somme de nombres réels, s'étendit à tous les textes et tous les auteurs.

Terminons ici en soulignant que la distinction soulevée par Heath à propos des signes mathématiques chez Diophante [23], entre ce qui serait un souci d'abréviation, opposé à celui de symbolisation, ne nous paraît guère pertinente, et en fait réservée au seul contexte de l'écriture euclidienne, purement rhétorique. Dans le cas d'une écriture symbolique déjà partiellement constituée, on verra en effet comment chaque décision nouvelle de représentation supplémentaire, de la part d'un auteur, à seule fin de prétendue abréviation, devra nécessairement s'insérer dans le contexte syntaxique préexistant et en épouser les règles. Elle perd ainsi le caractère exclusivement désignatif attaché à toute abréviation, pour devenir opératoire. De ce fait, la représentation elle-même échappe alors en partie à son auteur. On verra aussi comment, en échange, des développements proprement inattendus de l'auteur pourront à ce moment apparaître.

1.9 La constitution de deux registres.

La mise en place, du fait de Viète, Recorde et Descartes en particulier, de la version première de l'écriture symbolique mathématique, séparée de l'ancienne rhétorique, grecque et médiévale, peut être considérée comme achevée avec la parution de la *Géométrie* en 1637. Une mise en place qui se fit certes spontanément, sans décision concertée de la communauté des géomètres et sans qu'aucun des protagonistes ne comprît l'importance majeure de la modification dans l'écriture mathématique qui venait d'avoir eu lieu. Elle se fit aussi sans explicitation des règles syntaxiques sous-jacentes, pourtant constitutives, et que nous détaillons dans cette thèse. A seule fin de pouvoir seulement lire le texte, le lecteur naïf des années 1670, tel le jeune Leibniz, en fut donc réduit à un apprentissage sur le tas, par l'examen critique et comparé des exemples existants. Cette mise en place entraîna avec elle la constitution de deux registres distincts. D'une part, le registre purement formel des signes, que nous dirons combinatoire, en hommage à Leibniz : il s 'organise autour des signes

23 HEATH, *Greek*,I I, 456-457.

de diverses sortes : littéraux, numériques, opératoires, signe d'égalité enfin (absent, par exemple, chez Viète). D'un autre côté, le registre signifiant, celui de l'affectation - dans la langue naturelle, en termes rhétoriques-, d'interprétations aux signes exposés. Le clivage commença de s'organiser dès la plus simple des organisations symboliques : assembleurs et Lettres-Chiffres associés, qui contredit en effet, non seulement toute lecture séquentielle selon le fil du texte, mais surtout la syntaxe de la langue rhétorique. Déjà bien malmenée, celle-ci ne survécut pas à la disparition de son verbe central, qui acheva de la rendre intenable. Nous analysons en détail ci-dessous les deux registres, combinatoire et signifiant, d'une division fondamentale qui n'avait certes pas eu lieu d'être, aussi longtemps que les mathématiques avaient été écrites en langue naturelle. A l'interprétation des signes par des concepts, on opposera évidemment, en sens inverse, la représentation des concepts par des signes.

Devant un texte mathématique symboliquement écrit, on proposera ici, au moins théoriquement, une distinction de droit entre les positions premières du lecteur et de l'auteur (ils peuvent parfois être le même!). L'auteur du texte, parce qu'il s'efforce en premier lieu de traduire à l'aide de signes, ses visées mathématiques, s'emploie, quant à son premier mouvement, à effectuer des représentations. Le lecteur au contraire, qui doit être initialement supposé naïf, se trouve placé devant un ensemble structuré de signes auquel il cherche une interprétation, c'est-à-dire une signification (des référents) et pour cela, le déchiffrage impératif préalable de l'ordre dans effectuer les opérations indiquées : le sens primitif dans lequel il agit est donc celui de l'interprétation, en sens inverse de la représentation. Ces indications directionnelles ne sont évidemment qu'approximatives car l'auteur doit également se livrer à des déchiffrages partiels de ce qu'il a écrit, et donc, lui aussi, interpréter. Naturellement aussi, la codification est censée être univoque; elle l'est en général, effectivement, dans un premier temps, chez un même auteur, dans un même texte. Le signe cependant est un objet social par excellence (on l'observera clairement après Viète), et subit le sort des objets sociaux : à propos du même assemblage de signes, nombre d'interprétations différentes pourront être ultérieurement apportées par des lecteurs et auteurs différents. Ainsi se trouva-t-on peu à peu des raisons légitimes de déroger au principe premier de l'univocité de la représentation (Cf. 7.9.3 : *Sur la diversité des Clés*).

1.10 La méthode dans cette première partie.

Pour chacun des concepts plus haut cités, nous opérerons semblablement, privilégiant chaque fois la réflexion épistémologique sur la description historique ou événementielle, telle qu'on la trouve chez Cajori ; ainsi, mettrons-nous d'abord en évidence les intentions - fort simples en général- des géomètres (les "auteurs"). En un temps second, nous en décrirons la (ou les) représentation(s) symbolique(s) qu'ils lui donnèrent. Ancrée sur deux principes essentiels : l'arbitraire du signe et l'univocité de la représentation, c'est l'analyse de la codification, que nous limiterons à quelques représentations exemplaires, soit parce qu'elles furent durables et, par exemple, aujourd'hui encore usitées, soit parce qu'elles montrèrent par leur échec même, l'insuffisance de la réflexion de leurs auteurs. Un troisième temps sera consacré à la possibilité, aux modalités, et aux règles, du déchiffrement par d'autres géomètres (les "lecteurs"), du texte symbolique ainsi constitué. Ce moment ultérieur essentiel (il met en jeu pour la première fois l'activité sociale des signes) sera suivi -en un quatrième temps- d'une analyse et d'une réflexion sur le texte symbolique ainsi structuré, soutenues par une terminologie spécifique que nous proposons, adaptée, croyons-nous, à la description du niveau combinatoire (Formes, assembleurs, niveau, charactères, substitutions, métamorphoses, littéralisations, etc...). Enfin, en un cinquième et dernier temps, nous mettrons en regard, d'une part l'interprétation effective du texte symbolique, telle qu'elle résulta, dans les faits, du déchiffrement suivant les règles prescrites, et d'autre part la visée initiale des géomètres; dans nombre de cas, les possibilités offertes en retour par le texte symbolique, dépassèrent largement les intentions primitives de l'auteur. On mettra ainsi en évidence une mécanique et un jeu propres aux signes, qu'en évoquant une sorte d'autarcie du système symbolique, Leibniz fut le premier à souligner [24]. Apparut alors cet élément essentiel, concept-clé de la nouvelle organisation symbolique : la faculté de substitution combinatoire, que les systèmes de Viète et Descartes avaient certes tous deux permise, mais qu'aucun des deux auteurs n'utilisa. Et, comme nous le montrerons dans la seconde

---

24 [Leibniz] "compare l'usage intelligent des mots (et d'autres signes) avec l'emploi de jetons (...), non parce que ceux- ci renvoient tout le temps aux idées qu'ils sont censés représenter, mais plutôt parce que l'on peut effectuer avec ces jetons eux-mêmes toutes les opérations de calcul que l'on veut, *sans* passer incessamment au plan des idées. En réalité, c'est la possibilité de délayer indéfiniment ce renvoi aux idées qui est surtout appréciée par Leibniz." DASCAL M., *La sémiologie de Leibniz,* op.cit., 222.

partie, ce fut encore une fois Leibniz [25], qui n'avait pourtant rien inventé de l'écriture symbolique dont il héritait, qui en fit un emploi extensif et remarquable (Cf 12.2. *Le Nouveau calcul chez Leibniz*), débouchant sur des "canons" d'une importance mathématique considérable. Au chapitre 13 (*L'Art combinatoire.Substitutions et métamorphoses)*, nous intégrerons alors la substituabilité dans un cadre plus théorique : ainsi analyserons nous le mécanisme combinatoire, devenu si familier, de la littéralisation, et son interprétation comme dialectique extension-instantiation (13.2.4), débouchant enfin sur que nous appellerons la procédure de plongement, ce procédé majeur, aujourd'hui quotidien en mathématiques, à la fois combinatoire et signifiant, de création d'une espèce à partir d'un individu (13.2.5. *Plongements)*.

1.11 Conclusions, vers 1640.

Ainsi, la première partie de cette thèse décrit-elle la constitution de l'écriture symbolique mathématique, et son état vers 1640, après la publication de la *Géométrie* : notre analyse montrera comment les principaux caractères structurels, aujourd'hui en vigueur, étaient dès ce moment en place. Préparée par la longue tradition médiévale, puis l'école algébrique italienne, la constitution en aura ainsi été presque achevée en moins de cinquante ans (1591-1637), par Viète et Descartes, sans que les protagonistes soient aucunement conscients des bouleversements que la symbolique neuve allait apporter dans la pratique future des mathématiques elles-mêmes. Et c'est ce système, pour ainsi dire prêt à l'emploi, que trouvera le jeune Leibniz ébloui, chez Descartes et Newton, dans sa lecture de la *Géométrie*, tout comme dans sa correspondance avec Oldenbourg. Un système symbolique qui sera, pour une part, objet de sa réflexion philosophique, mais dont il saura aussi, le premier, tirer un extraordinaire parti mathématique.

1.12 Rhétorique, syncopée et symbolique chez Nesselmann.

Nous consacrons nos deux dernières sections de ce chapitre aux questions qui se posent aujourd'hui à l'analyste de textes mathématiques anciens, et aussi à la description du (très court) commentaire sur les signes et notations mathématiques, et d'abord chez Diophante qui, outre sa codification de l'inconnue,

---

25 Nous référencerons M.S, suivi du numéro du tome et de la page, l'édition des oeuvres mathématiques de Leibniz : LEIBNIZ G.W *Mathematische Schriften* (7 Vol). Gerhardt. Hildesheim. Ed. 1971.

introduisit des représentations pour les puissances et la soustraction, en un système pré-symbolique que détaille le *Die Algebra der Griechen* [26], où G.H.F Nesselmann, qui analyse avec finesse les systèmes grecs, consacre six chapitres à Diophante [27]. De l'ouvrage cependant, la critique n'a bien souvent voulu retenir que la classification qu'il propose dans le chapitre VII (*La forme de l'algèbre de Diophante. Nature de sa méthode de notation et de son rapport avec d'autres méthodes*), entre trois types d' "écriture de l'algèbre": rhétorique, syncopée, symbolique; nous en reprendrons pour partie la terminologie, et reproduisons ci-dessous, dans une traduction de Colette Bloch, le paragraphe concerné :

> Pour pouvoir juger plus exactement de la place qu'occupe Diophante à cet égard [sq. les notations], dans l'histoire de l'algèbre, nous ferons la remarque suivante. En ce qui concerne la représentation formelle des opérations algébriques et des équations, nous pouvons distinguer, dans le développement de cette science, trois étages historiquement et fondamentalement distinct. Le premier et plus bas degré peut s'appeler *algèbre rhétorique* ; il s'agit de calcul entièrement exprimé en mots, ce qui, en l'absence de tout signe, consiste à détailler en langue ordinaire le déroulement complet du calcul. A cette catégorie appartiennent des exemples de résolutions algébriques que nous trouvons chez Jamblique (que nous avons traité au Chapitre 5), de même que ce qui leur sert de base, l'έπανηα de THYMARIDAS ; s'y rattachent aussi tous les algébristes arabes et persans connus à ce jour, chez qui nous ne découvrons pas la moindre trace de langage algébrique en signes, pas plus que chez Jamblique ; de même encore les premiers italiens et leurs élèves, par exemple Regiomontanus, sont à classer avec eux (...).
> On peut appeler le second étage *algèbre syncopée*. L'exposé est de nature rhétorique comme les précédents, mais utilise, pour des concepts et des opérations qui reviennent fréquemment, toujours les mêmes abréviations à la place de mots entiers. A ce niveau se situent Diophante et ses successeurs européens jusqu'au milieu du XVIIe siècle, bien que

[26] Berlin, 1842.

[27] Chapitre VI : Historique sur Diophante et son oeuvre. Chapitre VII : La forme de l'algèbre de Diophante. Chapitre VIII : Le traitement des équations par Diophante. Chapitre IX : Méthodes de résolution de Diophante. Chapitre X : Les porismes de Diophante. Chapitre XI : Texte de Diophante sur les nombres polygonaux.

Viète ait déjà semé dans ses écrits le germe de l'algèbre moderne, germe qui cependant ne s'est développé que quelque temps après lui. Et en effet le troisième étage, celui de l'algèbre symbolique, représente toutes les formes et opérations possibles dans une langue de signes entièrement constituée et indépendante de l'expression orale, ce qui rend tout discours rhétorique inutile. Nous pouvons conduire un raisonnement algébrique parfaitement compréhensible du début à la fin sans employer un seul mot écrit, en insérant seulement ici ou là une conjonction entre les formules (au moins dans les développements les plus élémentaires, pour éviter au lecteur d'avoir à chercher et revenir en arrière), marquant ainsi aussitôt le lien d'une formule avec les précédentes et les suivantes. Mais d'ailleurs nous (les Européens à partir du milieu du XVII^{e} siècle) n'avons pas été les seuls à nous élever à ce stade : les mathématiciens hindous nous avaient devancés de plusieurs siècles ;
Afin de mieux mettre en évidence ces trois degrés, je vais prendre pour chacun d'eux un exemple qui, en ce qui concerne les deux premières méthodes sera emprunté, mot pour mot, à un mathématicien quelconque.

La typologie de Nesselmann est souvent évoquée par les commentateurs, Heath en particulier [28]; tout en le redéfinissant, nous lui emprunterons l'adjectif "rhétorique" pour désigner un certain état de l'écriture mathématique. A l'occasion, elle est cependant contradictoire, par exemple dans l'affectation des auteurs arabes à la catégorie des rhétoriciens purs. On voit mal aussi ce qui, dans cette typologie, viendrait distinguer, sur le plan symbolique, Descartes de Leibniz. Dans aucun des chapitres de son livre qui suivent, Nesselmann ne fait d'autre part usage de sa propre classification. Elle n'évite pas non plus les anachronismes, à commencer par celui d'*algèbre*, pour désigner la symbolique à l'époque de Diophante. A nos yeux, elle manque surtout de finesse, le terme nesselmannien d'algèbre syncopée -nous ne le reprendrons guère dans cette thèse- venant recouvrir indistinctement un foisonnement de situations symboliques diverses du moyen âge au début du XVII^{e} siècle, de Diophante à Stiefel, Viète, Wallis ou Leibniz.

28 *Greek*, II, 455.

1.13 De Van der Waerden à Cajori.

Pour le commentateur moderne des textes mathématiques du XVI^{e} siècle (et, plus généralement, de ceux précédant Descartes), la création d'un double registre, combinatoire et signifiant, suscite des problèmes de fond et de droit, qui, à notre connaissance, n'ont guère été évoqués. Nous prendrons comme exemple paradigmatique l'*Histoire de l'Algèbre* de Van der Waerden [29], ouvrage excellent et fort répandu. Tout le chapitre consacré aux auteurs Arabes du IX^{e} au XI^{e} siècle, Al-Kwàrizmí, Tàbit ben Qura et Omar Khayyàm, [30], ainsi qu'à l'algèbre en Italie du XIII^{e} au XVI^{e} siècle [31], et traitant enfin de Viète, Stevin et Fermat [32], est rédigé en termes cartésiens, évidemment anachroniques. Dans le premier des calculs rencontré (page 4), Van der Waerden s'en explique brièvement :

> "A square, which is equal to fourty things minus four squares.
> In modern notations, we may write this equation as
> $x^2 = 40x - 4x^2$ "

Sans davantage d'explications, tout le reste de l'exemple, puis du volume, est alors commenté avec des notations post-cartésiennes. Et depuis le dix-septième siècle, le procédé se rencontre partout, dans toutes les prétendues "traductions" et commentaires des textes du seizième, non seulement chez des géomètres comme Oughtred - il "traduisit" les *Eléments* dans un système symbolique contenant quarante pictogrammes de son crû-, mais aussi chez des auteurs contemporains aussi précautionneux et rigoureux que Witmer (op.cit) traduisant l'*Ars Magna*, ou Ritter commentant Viète (op.cit). En vérité, cette procédure est aujourd'hui universelle dans le commentaire. Si nous avons, pour notre part, tâché d'éviter de semblables anachronismes, nous y avons été néanmoins été bien souvent contraints, par exemple à propos d'une équation cossique un peu complexe (8.3 : *Une équation chez Stiefel).*

Se pose cependant la question du statut de semblable "traduction" : que dire d'une entreprise, qui ne respecte

---

29 *A History of Algebra. From al- Khwārismí to Emmy Noether.* Springer -Verlag. Berlin. 1903. Ed. 1985. op. cit.
30 idem. 3 - 31.
31 idem. 33 - 62.
32 idem. 63 - 72.

aucunement le système symbolique ancien, lui qui véhiculait ses conceptions propres, et dans lequel le texte a été conçu et écrit? Reconnaître par exemple, dans notre équation de Stiefel :

$$1\ \mathfrak{z}\mathfrak{z} + 2\ \mathfrak{c}\mathfrak{e} + 6\ \mathfrak{z} + 5\ \mathfrak{x} + 6 \text{ aequ. } 5550$$

cette "équation du quatrième degré" :

$$x^4 + 2\,x^3 + 6\,x^2 + 5x + 6 = 5550$$

est d'abord un anachronisme, mais aussi, pour une part, un non-sens. Le terme "quatrième degré", en effet, réfère à une hiérarchie souterraine de puissances, organisée par Descartes, et dont Stiefel n'avait certainement aucune représentation mentale. Pour lui, l'équation n'était qu'un simple entrelacs, reliant diverses substances emmêlées, aux statuts différents (Cube, Chose, etc...), qu'il s'agissait de dénouer, en exhibant la Chose, qui était en quelque sorte la clé. Dans ces conditions donc, la "traduction" dix-septièmiste aura dissous, complètement et définitivement, l'image d'une relation entre des espèces, pourtant constitutive de la question posée. Entre le texte de Stiefel et sa "traduction" post-cartésienne, se découvrent donc deux modes distincts de penser les mathématiques. Et la différence est, à notre sens, considérable, bien au-delà des pertes, glissements de sens, ou inadéquations, qu'on peut par exemple observer, entre deux langues naturelles, dans la traduction d'un texte littéraire.

Cela dit, il faut reconnaître qu'on ne peut rejeter en bloc toutes ces "traductions". D'une part, en regard de leur nombre : elles constituent la presque totalité du commentaire historique et philosophique relatif aux mathématiques avant Descartes. Un argument de fait qui peut certes sembler insuffisant. Mais il faut aussi se rendre à la nécessité de se faire simplement comprendre du lecteur d'aujourd'hui. Avec cet objectif, nous avons nous-mêmes été parfois contraints dans la présente étude à un emploi anachronique du système cartésien. Depuis Descartes en effet, le système symbolique mathématique, avec ses signes et sa syntaxe, est devenu chose si véritablement commune et universelle, qu'il s'est constitué en grille de lecture automatique, motif transcendental du cadre épistémologique intériorisé de l'*homo mathematicus*. *A contrario*, le lecteur non mathématicien, tels les apprentis du XVII^{e} siècle, dont le jeune Leibniz au premier chef, pourra être en un premier temps dérouté, voire rebuté, par des agrégats de signes apparemment inconstitués ou dont la syntaxe lui échappe. Ainsi devra-t-on reconnaître, au nom de l'effectivité, une certaine nécessité à ces "traductions".

Nous avons d'autre part regretté la quasi-absence de travaux épistémologiques pertinents sur notre sujet. On notera pourtant quelques textes généraux, provenant d'algébristes de l'école de Cambridge, tel Augustus de Morgan (dans l'article "Symbols" de la *Penny Cyclopaedia* de 1842, et aussi Charles Babbage dans *On the influence of Signs in Mathematical Reasoning* [33]. Au-delà de déclarations de principe, pertinentes mais vagues, ces textes n'apportent en réalité à notre analyse que bien peu d'éléments précis. En vérité, nous ferons surtout référence à *A History of mathematical notations,* de Florian Cajori [34], dont les deux volumes constituent une entreprise demeurée unique en son genre : la tentative d'un inventaire exhaustif de tous les signes et notations mathématiques, européens et orientaux, depuis les antiquités grecque et égyptienne, jusqu'au début de notre siècle, époque où écrivit Cajori. Ce texte, d'une exceptionnelle érudition, accumule les références d'occurrences de signes divers, tant dans les manuscrits que les imprimés. Le présent travail lui doit bien des exemples, où il sera chaque fois cité. Tel qu'il est cependant, le texte de Cajori n'offre aucune ouverture à l'interprétation philosophique ou épistémologique.

Le Volume I s'organise suivant deux axes bien distincts, par auteurs et par thèmes. Dans *Groups of Symbols Used by Individual Writers* [35], Cajori choisit d'abord de décrire les systèmes de notations d'un grand nombre de géomètres, représentatifs sur le plan symbolique, depuis l'antiquité jusqu'au XVII^{e} siècle, de Diophante et Brahmagupta, jusqu'à Wallis et Leibniz. Le critère de choix de Cajori étant l'innovation symbolique, on ne s'étonnera donc pas de trouver, à côté de mathématiciens reconnus, divers auteurs, inventifs en matière de signes et de représentations, mais dont la contribution aux mathématiques proprement dites fut mineure. Au début du XVII^{e} siècle en particulier, de nouveaux géomètres, tels Hérigone, Oughtred ou Rahn, aiguillonnés par les bouleversements

33 Transactions of Cambridge Philosophical Society.Vol II (1827), 330.

34 The Open Court Publishing Company. La Salle. Illinois. 1928, op. cit. Il sera référencé CAJORI, I ou II.

35 71 - 229.

symboliques de ce qu'on appelait à l'époque les "algèbres" de Viète et Descartes se mirent en devoir de produire à leur suite de nouveaux systèmes. Des entreprises parfois hautes en couleur, mais qui, malheureusement, manquèrent bien souvent de toute analyse : la construction d'un système symbolique adéquat requiert en effet une réflexion épistémologique approfondie, que, Leibniz fut au XVII^e siècle le premier, et le seul, à proposer. Nous examinons en 11.1 le système de Hérigone pour les Puissances. De son côté, dès l'édition *princeps* (1631) de son ouvrage majeur, la *Clavis*, Oughtred, proclamait son intérêt profond pour le symbolisme mathématique. Cajori consacre treize pages (187 - 199) et cinq tableaux, à l'étude du système d'Oughtred, qui n'employa pas moins de cent cinquante signes, dont aucun n'a survécu. Comme le note Cajori [36], Oughtred produisit aussi une bien étrange "traduction" du Livre X des *Eléments*, par le moyen d'une représentation largement idéographique, utilisant quarante signes nouveaux [37]. Quant à Rahn, une de ses principales innovations fut de représenter, dans sa *Teutsche Algebra* de 1659 (Zurich), des commentaires logiques au moyen de signes figurés [38]. Ainsi, le "donc" était-il symbolisé par

$$\therefore$$

Dans *Topical Survey of the Use of Notations*, [39] Cajori propose ensuite une étude par thèmes, selon ces douze rubriques : *Signs of Addition and Substraction* [40], *Signs of Multiplication* [41], *Signs of Division and Ratio* [42], *Signs of proportion* [43], *Signs of Equality* [44], *Signs of Common fractions* [45], *Signs of Decimal Fractions* [46], *Signs of Powers* [47], *Signs for Roots* [48], *Signs for Unknown Numbers* [49], *Signs of Aggregation* [50].

---

36 CAJORI, I, 427.
37 Troisième édition de la *Clavis*.
38 CAJORI, I, op. cit, I, 211.
39 CAJORI, I, op. cit., 229, 400.
40 idem. 229 - 250.
41 idem. 250 - 268.
42 idem. 268 - 278.
43 idem. 278 - 297.
44 idem. 297 - 309.
45 idem. 309 - 314.
46 idem. 314 - 335.
47 idem. 335 - 360.
48 idem. 360 - 379.
49 idem. 379 - 384.
50 idem. 384 - 400.

Nous nous réfèrerons quelquefois aussi au traité de Désiré André [51], l'un des rares jamais consacré à la notation mathématique *per se* et qui présente trois volets : Enumération, Choix et Usage. La partie *Enumération*, sans ancrage historique suffisant, est largement insatisfaisante, bien inférieure à Cajori. D'un autre côté, dans sa seconde partie, l'ouvrage est presque l'un des seuls à traiter des choix et usages des notations, autrement dit de problèmes purement symboliques, prétendant ainsi offrir aux futurs auteurs un panorama de conseils en matière de choix des représentations. Le texte présente alors des aspects intéressants, comme la conception de la structure même de l'organisation symbolique (ce que nous appellerons *infra* forme propositionnelle) [52], aussi les avantages des canons [53], ou encore l'affirmation répétée de l'univocité de la représentation [54], règle simple certes, mais qu'il fallait néanmoins énoncer. On notera aussi une analyse de quelques cas d'ambiguïté dans l'écriture symbolique [55]. Désiré André, cependant, n'est pas Leibniz : des termes fondamentaux qu'il emploie pourtant à longueur de pages, il n'en définit aucun avec une précision telle qu'elle permette son emploi ultérieur. Que peut bien recouvrir le *disparate*, qui donne ensuite lieu à des conseils fantaisistes [56]? Y a-t-il vraiment une différence entre un signe qui *correspond* à un objet et un autre qui lui est *rapporté* [57]? L'ouvrage présente ainsi une forme insistante de flou, alors que l'intention suprême de l'auteur, si souvent réaffirmée, était de fonder un système précis de règles universelles. La bibliographie est très incertaine, et ses références incomplètes. Surtout, l'auteur, qui n'a proposé aucune analyse épistémologique, se livre à un mélange incessant, en matière de choix de notations, entre ses présupposés et ses propres options, valables dans un contexte local que

---

51 ANDRE D. *Des Notations mathématiques. Enumération, Choix et Usage.* Gauthier Villars. Paris. 1909.

52 ANDRE, op.cit. page VII.

53 idem. page XI.

54 idem. (§ 419 *et* § 420, 166), (§425,170), (§ 469,189).

55 idem. (§ 761, 315,)

56 idem. (§ 601, 238) : "Deux objets disparates doivent toujours être représentés par deux signes disparates (...). " § 602 : "Deux fonctions disparates pourront ainsi être représentées par f et ϕ ou par f et s ; mais non point par f et g. "
(§603, 239): "Il arrive souvent, surtout dans les problèmes usuels que deux quantités de même nature, mais cependant disparates, sont l'une *petite*, l'autre *grande*. On les représente alors par une minuscule et la majuscule correspondante."

57 idem. Partie II, PRECISION DU SIGNE, §413, 164 : "Plusieurs signes considérés ensemble, abstraction faite de la nature des objets qu'ils représentent, doivent pour être bons, posséder certaines qualités. Il faut qu'ils *différent* franchement les uns des autres; qu'ils *correspondent* chacun à chacun à leurs objets respectifs; qu'ils puissent être facilement *rapportés* à leurs objets. C'est l'ensemble de ces qualités que je désigne par le mot *précision*. " (Italiques de l'auteur)

manifestement lui-même connaît bien, mais n'explicite pas, avec ce que devraient être les règles générales d'une représentation valable pour tout système symbolique mathématique. En conséquence, les conseils d'André sont, soit franchement absurdes, comme dans le cas des "disparates" a et a', [58] soit susceptibles de ne s'appliquer que dans un nombre bien limité de cas. Avec toutes ses imperfections, l'ouvrage demeure néanmoins, comme celui de Cajori, unique en son genre.

[58] "Les lettres a et a 'par exemple doivent toujours être regardées et employées comme deux signes disparates. Il ne faut jamais s'en servir pour deux objet analogues. Cette règle est peut-être, de toutes les règles strictes, celle qui est le moins observée : on l'enfreint constamment." (§562, 223) et, plus loin, (§ 564, 224) : "La différence qui sépare a de a_1 est de la même importance que celle qui séparait a de a'. "

28

Première partie :
Le système.

Chapitre 2

L' écriture rhétorique des Mathématiques.

2. L'écriture rhétorique des Mathématiques.

2.1. Médials chez Euclide.

Analysant ci-dessous un exemple des *Eléments*, on montre comment le texte euclidien s'inscrivit dans le cadre de la seule langue naturelle, tout se représentant en mots, l'énoncé d'un théorème comme sa preuve. L'ensemble était par ailleurs gouverné par divers rituels, non analysés ici, mais longuement étudiés par les commentateurs, de Proclus [1] à G. Granger [2].

Extrait du livre X, la "croix des mathématiciens", selon Stevin [3], l'exemple traite d'une question, précise et intéressante, de commensurabilité et d'irrationalité [4], dont voici la substance, au sens moderne du terme irrationnel : deux nombres sont donnés tels que le premier soit rationnel, et leur rapport irrationnel, cependant que le carré de ce même rapport est rationnel; alors, le produit des deux nombres est un irrationnel, de même que la racine carrée de ce produit. Un irrationnel de ce dernier type est ensuite appelé par Euclide un *médial.* Comme on verra ci-dessous,un médial est, en termes modernes, un nombre réel de la forme a. $\sqrt[4]{k}$, où a est rationnel, et k un entier non carré: par exemple $3\sqrt[4]{2}$ est le signe d'un médial. Une des difficultés de compréhension du texte original réside en la définition, spécifique et extensive, du terme "rationnel" chez Euclide (Cf commentaire de Heath [5]).

Proposition XXI [6]:

1 VER EECKE, *Proclus,* op. cit.

2 G. GRANGER, *Le style euclidien et la notion de grandeur,* Chapitre II de l'*Essai d'une philosophie du style,* référé comme (GRANGER, *Style).*

3 Euclide consacre son livre X à nombre de définitions et d'études d'irrationnels nouveaux, à la façon des médials. Ce livre X se situe dans la lignée des pythagoriciens (Cf. HEATH, *Elements,* III, 1-3, *Introductory Note*). Après la découverte pythagoricienne des irrationnels, Euclide tente en effet de fonder une typologie entre ceux- ci, une façon de tâcher d'inventorier l'inconnu nouveau. Au XVIe siècle, le livre X était encore considéré comme techniquement très difficile, même par des maîtres comme Stevin : "La difficulté du dixiesme Livre d'Euclide est à plusieurs devenue en horreur, voire jusqu'à l'appeler la croix des mathématiciens, matière trop dure à digérer, et en laquelle ils n'aperçoivent aucune utilité." (in HEATH, idem, 9).

4 Nous empruntons nos exemples chez Euclide à HEATH, *The Thirteen Books of The Elements. 1908 (3 Vol),* et utiliserons la 2nd Edition Unabriged. Dover. New-York. 1956.

5 "We may set out *any straight line* and call it rational, and it is then with reference to this assumed rational straight line that others are called *rational* or *irrational.*

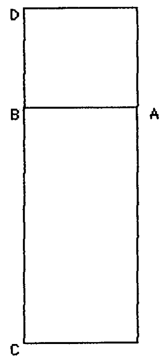
We should carefully note that the signification of *rational* in Euclid is wider than in our terminolgy. With him, not only is a straight line commensurable *in length* with a rational straight line, but a straight line is rational which is commensurable with a rational straight line *in square only.*" (HEATH, *Elements,* III, 11.)

6 Nous utilisons HEATH, *Elements,* III, 49 - 51. Un texte de la même proposition, rédigé en langue grecque, est en annexe.

Le rectangle contenu par des lignes rationnelles qui sont commensurables en carrés seulement est irrationnel et le côté d'un tel carré est irrationnel. On l'appellera un **medial.** [7]

Soit *AC* le rectangle délimité par les lignes droites rationnelles *AB*, *BC* qui sont commensurables en carrés seulement.

Je dis que *AC* est irrationnel et que le côté du carré qui lui est égal est irrationnel;
on l'appellera un **médial.**



Car si on décrit sur *AB* le carré *AD* [8]

alors *AD* est rationnel [Livre X, Def.4]

Et comme *AB* est incommensurable en longueur avec *BC*,
car par hypothèse, ils sont commensurables en carrés seulement,
cependant *AB* est égal à *BD*,

---

7 En écriture moderne, l'énoncé peut ainsi se transcrire : si a est le signe d'un nombre rationnel, et b le signe d'un autre nombre tels que a/b soit irrationnel, cependant que a^2/b^2 est au contraire rationnel, alors a. b est un irrationnel, de même que $\sqrt{a.b}$. Un irrationnel comme $\sqrt{a.b}$ est alors un médial.

Dans ces conditions, b pourra s'écrire $b = a\sqrt{k}$ où k est un rationnel non carré. Alors $a.b = a^2.\sqrt{k}$ n'est pas rationnel, non plus que le médial $\sqrt{a.b} = a.\sqrt[4]{k}$.

8 En termes modernes :
Si a = AB est rationnel, alors le "carré " AD = a^2 est aussi rationnel.
Or AB = BD = a. Donc BD est incommensurable avec BC = b.

On a $\dfrac{DB}{BC} \notin \mathbb{Q}$. Comme $\dfrac{DB}{BC} = \dfrac{DB \,.\, AB}{BC.\ AB} = \dfrac{\text{Aire du carré (AD)}}{\text{Aire du rectangle (ABC)}}$

Comme Aire du carré (AD) $\in \mathbb{Q}$, alors : Aire du rectangle (ABC) $\notin \mathbb{Q}$.
Dans ces conditions, le côte du carré ayant même aire que le rectangle (ABC) n'est pas non plus rationnel: c'est le médial.

donc *BD* est aussi incommensurable
avec *BC*.
Et, comme *DB* est à *BC* comme *AD* est à *AC* [VI,I]
Donc *DA* est incommensurable avec *DB* [X,II]
Mais *DA* est rationnel;
Donc *AC* est irrationnel,
de sorte que le carré du côté égal à *AC*
est aussi irrationnel [Livre X,Def.4]

Et nous appellerons ce dernier un **médial**.

Le contenu de cette Proposition XXI est donc d'abord, comme il est fréquent chez Euclide, l'affirmation d'un résultat universel (un "théorème", dans la classification de Proclus) et ne propose aucune procédure inquisitoriale, recherche d'inconnue ou de construction de figure, qui serait un "problème". Proclus note qu'Euclide indiquait lui-même la différence, en distinguant par la mention terminale "ce qu'il fallait faire" à la fin des "choses enseignées" (problèmes) de "ce qu'il fallait démontrer", caractéristique des théorèmes [9]. Dans sa dernière ligne, le texte s'achève par la définition d'un type particulier d'irrationnel (médial), dont la preuve de l'existence est la raison d'être de la proposition XXI. On a donc ici affaire au schéma, aujourd'hui usuel, des "théorème et définition", celui-ci précédant nécessairement celle-là. La proposition se résume d'autre part à constater l'irrationalité de certaines grandeurs, une conclusion aujourd'hui considérée comme strictement numérique et non géométrique. Comme on l'a cependant constaté, la solution euclidienne, ne comportant aucun type de calcul, est purement géométrique.

Sur le plan de la forme enfin, cet exemple démontre à l'évidence ce que nous avions annoncé : à la notable exception de la figure géométrique, tout ici est mots, le texte de la proposition, comme sa preuve. Certes, figurent bien dans le texte des assemblages de signes comme AB ou AD, introduits et définis dans le cours de la preuve, et qui n'appartiennent pas à la langue commune. Mais il est clair, d'après le contexte, que les signes n'ont qu'une fonction désignative (ils servent à repérer les "lignes" (AB) ou les carrés (AD) de la figure [10]), et non pas opératoire : ils ne sont en effet soumis à aucune règle syntaxique propre, c'est-à-dire distincte de celles de la langue commune dans laquelle ils sont complètement

9 VER EECKE, *Proclus*, op. cit, 73.

10 Cette représentation, donnée sans autre justification, était usuelle à l'époque, pour désigner le carré de diagonale AD. On la trouve à nouveau chez Cardan au XVI^{e} siècle.

insérés, comme pures abréviations. Il n'y a pas ici, à proprement parler, de représentation symbolique d'objets ou de concepts mathématiques. Et cette caractérisque permanente vaudra tout autant dans les textes des manuscrits grecs [11] que dans les traductions qui en furent proposées. Reprenant le terme de Nesselmann, nous reconnaîtrons ici une écriture purement *rhétorique* des mathématiques.

2.2.

Quelles que soient les questions, géométriques ou numériques, rencontrées chez Euclide au travers des treize livres de ses *Eléments*, persisteront ces deux caractéristiques : sur le plan du contenu, la preuve est toujours établie sous forme géométrique; sur le plan formel, énoncé et solution sont publiés rhétoriquement, dans la langue naturelle, sans aucune représentation symbolique des concepts ou objets.

Enracinées dans la langue commune, les mathématiques se lirent donc comme tout texte littéraire, à la portée du lecteur grec cultivé et curieux. Et comme le montre bien l'analyse de Gaston Granger [12], l'élégance et le balancement du style euclidien furent ainsi tout autant constitutifs de la splendeur de l'édifice mathématique que son admirable architecture interne. L'influence considérable qu'Euclide exerça sur la postérité et dont témoigne un commentaire d'une exceptionnelle abondance [13] s'exerça donc, jusqu'au milieu du XVII^{e} siècle européen, dans le registre strictement délimité de la littérature et la rhétorique. Au contraire, et en dépit de l'attachement sincère de son auteur à la tradition mathématique des Anciens, la *Géométrie* de Descartes est le premier des ouvrages dont la facture soit définitivement non-euclidienne.

Rétrospectivement cependant, on conçoit à quel point cette écriture euclidienne était en fait limitée à l'étude de questions purement géométriques, essentiellement de type universel, ou bien de quelques rares questions aujourd'hui

11 On trouvera en annexe le *fac simile* d'une page d'un manuscrit grec des Eléments, dit Bodleian, écrit en 888. Notre texte reproduit la page de garde de HEATH T, *Elements*, I, et commenté par celui-ci en page XI d'introduction.

12 GRANGER, *Style* : "La démonstration d'une proposition des *Eléments* se déroule en effet selon une sorte de rituel, qui n'a de comparable qu'en poésie le schème des pièces à forme fixe." (page 24). "La beauté du style euclidien s'opposerait à celle des styles axiomatiques modernes un peu, comme dans le langage de Hegel, la beauté "symbolique " des tombeaux et des statues de l'Egypte s'oppose à la beauté "classique " des temples et des figures de la Grèce." (page 25).

13 Sur le commentaire et les scoliastes, Cf. HEATH, *Elements*, I : *Euclid and the traditions about him* (1). *Greek commentators other than Proclus* (19). *Proclus and his sources* (29), *The Scholia* (64), *Euclid in Arabia* (75).

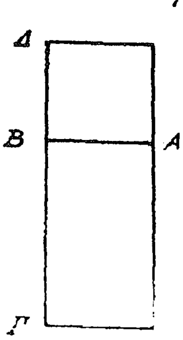
considérées comme numériques, mais dont la solution pouvait être géométriquement donnée. Les deux aspects plus haut décrits (preuves géométriques et style rhétorique) étaient ainsi organiquement liés. Inversement, l'écriture euclidienne des mathématiques ne pouvait rendre compte de l'analyse de procédures inquisitoriales portant sur des nombres dès lors que celles-ci devenaient complexes, situation dans laquelle une représentation, tant de l'inconnue que des actions sur elle (opérations) se constituait comme une nécessité. Et, de fait, à l'époque classique, ce type de problèmes numériques était largement absent, la Géométrie, presque co-extensive à la Mathématique, occupant alors tout le terrain. Les premiers signes d'un changement véritable dans l'écriture, mais qui longtemps ne fut pas perçu comme tel, vinrent sept siècles plus tard, du fait de Diophante, et d'un registre bien éloigné : des questions de recherches arithmétiques de nombres entiers ou rationnels satisfaisant à certaines conditions.

ANNEXES AU CHAPITRE 2

Annexe 1 . *Eléments* , X, 21 .

κα'

Τὸ ὑπὸ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν περιεχόμενον ὀρθο-γώνιον ἄλογόν ἐστιν, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

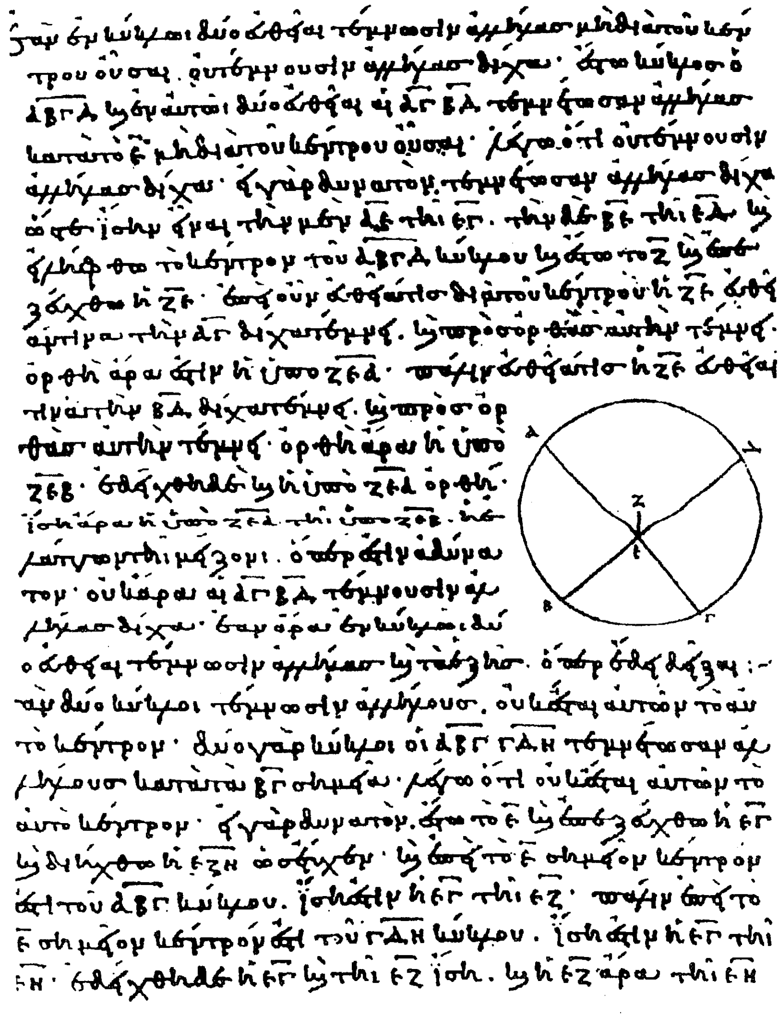


Ὑπὸ γὰρ ῥητῶν δυνάμει μόνον συμμέτρων εὐθειῶν τῶν ΑΒ, ΒΓ ὀρθογώνιον περιεχέσθω τὸ ΑΓ· λέγω, ὅτι ἄλογόν ἐστι τὸ ΑΓ, καὶ ἡ δυναμένη αὐτὸ ἄλογός ἐστιν, καλείσθω δὲ μέση.

Ἀναγεγράφθω γὰρ ἀπὸ τῆς ΑΒ τετράγωνον τὸ ΑΔ· ῥητὸν ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΔ· καὶ ἐπεὶ ἀσύμμετρός ἐστιν ἡ ΑΒ τῇ ΒΓ μήκει· δυνάμει γὰρ μόνον ὑπόκεινται σύμμετροι· ἴση δὲ ἡ ΑΒ τῇ ΒΔ, ἀσύμμετρος ἄρα ἐστὶ καὶ ἡ ΔΒ τῇ ΒΓ μήκει. καί ἐστιν ὡς ἡ ΔΒ πρὸς τὴν ΒΓ, οὕτως τὸ ΑΔ πρὸς τὸ ΑΓ· ἀσύμμετρον ἄρα [ἐστὶ] τὸ ΔΑ τῷ ΑΓ. ῥητὸν δὲ τὸ ΔΑ· ἄλογον ἄρα ἐστὶ τὸ ΑΓ· ὥστε καὶ ἡ δυναμένη τὸ ΑΓ [τουτέστιν ἡ ἴσον αὐτῷ τετράγωνον δυναμένη] ἄλογός ἐστι, καλείσθω δὲ μέση· ὅπερ ἔδει δεῖξαι.

Euclide, *Eléments*, X, 21, en écriture grecque. Extrait de la traduction de KOSKAS. Editions du CNRS, Paris. 1978, vol 2, page 85.

Annexe 2 . *Eléments* . Manuscrit du IX^{e} siècle .



Fragment du Manuscrit Bodleian (888 après J.C) (Cf Heath , *Elements* , I, 47-48) , archétype d' une pure écriture rhétorique , avec accompagnement d'une figure.

Première partie :
Le système.

Chapitre 3

L'inconnu et ses signes.

3 . L'Inconnu et ses signes.

3.1. Zeta et Chose.

Pour rechercher un nombre entier ou rationnel, Diophante d'Alexandrie avait, le premier, introduit un signe spécifique désignant la quantité inconnue qu'il se proposait de déterminer. Des signes, divers chez Diophante selon les textes, nous retiendrons le plus fréquent, le Zeta :

$$\zeta$$

dernière lettre de l'alphabet grec, non utilisée à la représentation de nombres [1]. A l'exception du "Hau - Calcul" qu'on trouvait chez les égyptiens, comme dans le papyrus Ahmes [2], et qui fut partiellement répandu chez les grecs, l'écriture de Diophante fut la première à introduire en mathématiques une représentation symbolique véritable. Comme on l'a déjà noté, la question, longuement débattue entre Tannery et Heath [3], de savoir s'il s'est agi, chez Diophante, d'une abréviation ou d'un symbole, ne nous paraît guère pertinente.

Nous examinerons en second lieu la résolution, par des méthodes numériques (*i.e* non géométriques), de ce qu'on appelle aujourd'hui une équation du premier degré, en utilisant la représentation cossique de l'*Algebra* de Clavius [4] :

"Soit à rechercher la valeur inconnue de la Chose 𝔵., telle que :

2 𝔵. + 6 soient égalés à 11

Par division par 2 :

1 𝔵. + 3 égalés à 5, 5

Donc:

1 𝔵. égalé à 5, 5 - 3

---

1 Cf. P. Ver Eecke : *DIOPHANTE d'ALEXANDRIE* , op. cit, page 2, note 4 et page 3, notes 1 à 10. Le texte de Ver Eecke peut difficilement être utilisé ici : il ne suit pas en effet Diophante, en ne proposant dans le cours de la traduction aucune reproduction des signes diophantiens. On trouvera une analyse de la représentation symbolique chez Diophante dans CAJORI, I, 71- 74 et HEATH, *Greek* , II, 455- 461.

2 Il était chez les Egyptiens un signe spécifique pour le "tas" (*hau*), dénomination locale de l'inconnue. Cf. CAJORI, I,page 15.

3 Cf. HEATH, *Greek*, II, 457.

4 L' *Algebra* de 1608 (op. cit.), de Clavius -un personnage-clé de la réforme des études des Collèges jésuites et, en conséquence, dans l'éducation de Descartes- propose en son début une intéressante suite de définitions et de règles d'emploi des "nombres cossiques" (addition et multiplication, division et extraction de racines).

Pour la clarté de l'exposé, nous avons délibérément choisi un exemple extrêmement simplifié, qui ne se trouve pas chez Clavius. Le traité présente cependant une impressionante compilation d'exemples analogues, du premier degré, tels les problèmes 61 à 64 du Chapitre XXXI, pages 346- 350. Le problème 62 est reproduit en annexe.

Il suit que la valeur de la Chose est 2, 5."

On l'illustrera par une équation du texte original [5] :

2 ℞ + 100 — 1 A.) Ac proinde æquatio erit inter 1 A + 100. &
4 ℞ + 200 — 2 A. Additisq. 2 A, vtrobique, inter 3 A + 100. &

La visée de l'auteur, Diophante ou Clavius, aura chaque fois été la recherche d'une Chose inconnue, assujettie à vérifier une certaine relation : une "équation cossique", dans le cas de Clavius, c'est-à-dire une simple égalité [6]. Ainsi placé devant un problème "en nombres", l'auteur produisait une procédure inquisitoriale, assorti d'une preuve calculatoire. Clavius, qui, dans le registre rhétorique, avait d'abord seulement *dénommé* la quantité inconnue (la "Chose"), avait ensuite décidé de la *représenter* par un signe spécifique dans le registre symbolique. A partir de la relation initiale, il aura ensuite décrit une séquence, considérée comme légitime, d'opérations elles-mêmes légitimes (un "calcul"): division de toute une équation par un même nombre, passage d'un nombre d'un côté à l'autre de l'égalité d'une même équation, en en changeant le signe. On reconnaît ici deux des manipulations fondamentales, à l'origine du terme même d'algèbre [7]. Nous ne discuterons pas des questions de significations, c'est-à-dire de la légitimité du calcul, seulement des questions de représentations symboliques qu'il aura induit. Quoiqu'il en soit en effet de la légitimité de la déduction, dès lors que l'écriture contenait une représentation symbolique de l'inconnue, ainsi suivie à la trace, le passage d'une ligne à la suivante dans la succession des équations présenta un caractère automatique, extraordinairement commode : la mécanique "aveugle" du calcul, dont Leibniz le premier, souligna avec insistance les privilèges. Et depuis Leibniz en effet, ne fut plus mise en doute la supériorité du calcul, symboliquement écrit, sur toute forme de résolution rhétorique. Une conclusion qui semble aujourd'hui aller de soi, mais qui, longtemps,

---

5 Dans la résolution de l'exemple 62 du Chapitre X X X I (page 347) de l' *Algebra* de Clavius . On trouvera en annexe l' énoncé de cet exemple, le début de la solution et des commentaires .

6 Le terme même d '*equatio* figure chez Clavius, par exemple page 347, problème 62, dans l'*Algebra*. Cf. également ci-dessous, chapitre 6, la question de la représentation symbolique de l'égalité.

7 Mohammed ibn Musa Al-Khowarismi fut le premier qui employa le terme d' "Algèbre". Il vivait au IX^e^siècle. Le terme initial se constituait, en fait, de deux mots : *al-jebr w' almuqabala*, dont la traduction française la plus proche est "restauration et réduction". La "restauration " consiste à faire passer des termes d'un côté à l'autre de l'équation en en changeant le signe, et la "réduction" à
40 regrouper des termes analogues. Dans leurs déclarations liminaires, les auteurs européens du XVI^e^ siècle, italiens en particulier, invoquaient souvent rituellement, à la fois l'*algebra* et l' *almuqabala*, Cf. par exemple l'introduction au Livre IX des *Quesiti*, de N. Tartaglia (op. cit). Cf. aussi CAJORI, *History of Mathematics*, 103.

ne fut pas perçue comme telle. Au point que nous concluons rétrospectivement aujourd'hui que, dans un registre qui aurait été purement rhétorique, la résolution des problèmes de calcul serait devenue rapidement impraticable en fait, sinon en droit, même dans le cas d'une simple équation du second degré (Cf. *infra* 5.4 : *Equation "commune" et canon du second degré*).

3.2. Symbolisation et méthode analytique.

Représenter l'inconnue répondait à un double objectif initial : d'une part, incarner dans l'écriture la Chose par un signe permanent, en une visée simplement abréviative; d'autre part, en les mettant en pleine lumière, rendre visible la légitimité des opérations successivement effectuées sur la représentation, à partir de l'équation initiale. Dans notre modeste exemple, la codification permettait à l'auteur de trouver une valeur (et une seulement) pour la Chose. L' analyse de la preuve met cependant en évidence un mode de discours hypothétique. Le calculateur opèrant sur la Chose comme si elle était connue, les mécanismes du calcul (division par 2 de tous les termes d'une équation, passage de l'autre côté, etc...) effectuent, à partir du requis, cette suite de déductions hypothétiques :

"Si la chose était connue et telle que

2 ꝶ + 6 soient égalés à 11

alors la chose vérifierait pareillement l'égalité obtenue par division par 2 :

1 ꝶ + 3 égalés à 5, 5

c'est-à-dire que 1 ꝶ + 3 serait connu et ensuite égalé à 5,5(...)".

La procédure développant ainsi à chaque pas des conséquences qui sont autant de conditions nécessaires, le déroulement de la démonstration met mécaniquement en place une démarche analytique, entièrement conditionnée à la fois par la connaissance supposée de la Chose, et par sa représentation dans le calcul par le moyen d'un symbole *sui generis*. Une procédure analytique qui est évidemment dans la nature même de tout calcul où l'Inconnu est représenté. Nous en donnons ci-dessous des exemples plus complexes empruntés à Descartes [8].

[8] A la fin des *Regulae*, dans les trois dernières Règles XIX, XX, XXI, qui ne comportent que leur seul énoncé, Descartes met en lumière avec une particulière pertinence le mécanisme de la résolution des équations (*Regulae*, 468, 21 à 469, 13) . Ces règles sont reprises presque mot pour mot dans la *Géométrie* 41
(A.T, VI, 372, 22 à 373, 2 et 373, 2 à 374, 5). Cf. notre analyse dans Regulae et *Mathematiques*, 85- 86 (op. cit), ainsi que celle de G. Granger dans *Philosophie et mathématique leibniziennes*, Revue de Métaphysique et de Morale, 1, (1981), 1 (note de bas de page).

3.3. Du "Hau - Calcul" à Cardan. Eléments d'histoire.

Ces questions où un élément numérique était à la fois inconnu et recherché étaient en vérité presque aussi vieilles que les mathématiques elles-mêmes. La *dénomination*, dans le registre rhétorique, de la Chose inconnue, eut pour sa part une bien longue histoire, associée à celles des peuples. Les Egyptiens recherchèrent un "tas" (Hau), d'où le nom de Hau-Calcul. Diophante, de son côté, déclara vouloir trouver un nombre entier "contenant une multitude indéterminée ou indéfinie d'unités" [9], qu'il dénomme l'arithme (ἀριθμός). D'un autre côté, ce que l'on recherchait fut, bien souvent aussi, ce que l'on désirait. Et donc, en des temps naïfs, on le désigna comme le bien, l'héritage, la possession (les Arabes), la couleur (les Hindous), dénominations qui, au bout d'un temps, parurent trop spécifiques, au regard de la profonde analogie entre les procédés de recherche. En Europe, au Moyen-Age et à la Renaissance, se substitua ce mot-valise, porteur d'images ambiguës et multiples, qui rapidement trouva sa place en latin, puis dans les langues communes: *res*, la Chose, *coss* en allemand, *cosa* en italien, puis, à la suite de Rudolff, l'écriture *cossique*, qu'utilisa entre autres Clavius. Depuis Descartes [10], on dit l'inconnue.

Dans l'introduction *supra* à ce chapitre, nous avons brièvement conclu que, dans tout problème contenant une inconnue, il était indispensable de représenter celle-ci symboliquement, afin de la manipuler pour résoudre, et qu'il n'aurait certes pas suffi de la dénommer. Une conclusion qui nous paraît aujourd'hui s'imposer avec tant de force qu'on serait tenté de parler de nécessité de la représentation symbolique. Ce serait oublier que semblable nécessité ne fut pas historiquement perçue avant Diophante. A la période classique grecque en effet, les quelques questions de recherches de nombres résolues -les épigrammes arithmétiques- étaient traitées sur un mode purement rhétorique. En voici un exemple classique d'énoncé :

> "déterminer un certain nombre de pommes qui doivent être distribuées parmi six personnes de façon que si les quatre premières reçoivent respectivement un tiers, un huitième, un

---

42 [9] πλῆθος μονάδων ἀόριστον
Cf. l'analyse sur ce point de HEATH, *Greek* , II, 456.

[10] "C'est-à-dire z , que je prends pour la quantité inconnue, est égale à b ." (A.T, VI, 373).

quart et un cinquième, alors la cinquième personne reçoive dix pommes et qu'il y en ait une de reste pour la sixième [11]".

Rétrospectivement nous considérons aujourd'hui que résoudre, sans intervention d'écriture symbolique, ce type de questions, requiert plutôt une ingéniosité particulière à chaque cas, que des qualités générales de méthode, illustrant ainsi les limitations inhérentes aux procédés purement rhétoriques. En vérité, les questions considérées dans les épigrammes furent de types peu variés, ni susceptibles de l'être. Assignés en fait par les Grecs eux-mêmes à un registre ludique un peu anecdotique, les épigrammes n'acquirent jamais le statut de problème mathématique de plein exercice.

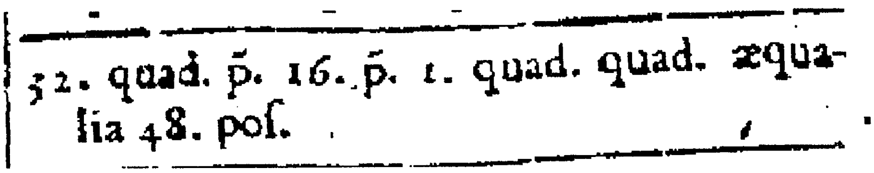
L'introduction par Diophante de son ζ modifia considérablement les choses. Et donc, après lui, les géomètres, médiévaux en particulier, ne se limitèrent plus à la seule dénomination du requis inconnu, mais le représentèrent symboliquement dans le calcul. Sur ce point cependant, une obligation était évidemment impérative : refuser toute confusion avec la représentation du donné, afin de spécifier l'Inconnu, une catégorie dont on ne connaissait en vérité que l'absence de détermination. Semblable nécessité provint donc, et pour la première fois, de l'intérieur même du système symbolique naissant. Diophante avait utilisé le *zeta,* signe le plus éloigné possible des autres lettres de l'alphabet, interprétées comme nombres. De même, les géomètres médiévaux commençèrent par faire choix d'un signe figuré, qui fut distinct de toutes les inscriptions exposées sur la feuille ou sur l'abaque, numériques ou opératoires. Ainsi, dans l'école cossique, avant Viète, l'Inconnu dans un calcul fut représenté par

 : le signe cossique pour la Chose.

Une Figure qui eut devant elle une bien longue existence. Encore employée par Clavius à la fin du XVI^e siècle elle était, comme on verra (chapitre 10 : *Descartes et l'écriture symbolique*), toujours usitée par le jeune Descartes dans les *Cogitationes Privatae.* Parallèlement au système cossique allemand, prospéra au XVI^e siècle une école d'algébristes italiens (dont Tartaglia, Cardan et Bombelli) qui privilègièrent largement un système de signes littéraux. Ainsi, dans l'*Ars Magna,* Cardan utilise-t-

11 Exemple extrait de HEATH, *Greek* , II, 442.

il pour la Chose la représentation pos. (*positio)*: "*rem ignotam, quam vocamus positionem* [12]." Ainsi Cardan écrit-il une équation :


32. quad. p̄. 16. p̄. 1. quad. quad. æqualia 48. pos.

32.quad.´ p. 16. ´p. 1 quad.quad. aequalia 48. pos. [13]

Diverses tentatives fleurirent au XVI^e^ siècle, chaque auteur, tels Stiefel ou Stevin, apportant avec lui un signe nouveau pour la Chose, dont Cajori dresse un inventaire minutieux [14]. Viète, comme on verra, (chapitre 7 : *Viète et l' Indéterminé*) proposa une codification littérale pure, au moyen de voyelles majuscules : A, E, I, O, etc... De son côté, au système cossique de sa jeunesse, Descartes substituera, dans la *Géométrie*, les dernières lettres minuscules de l'alphabet latin, les signes x, y, z aujourd'hui encore en vigueur (Cf. chapitre 10).

La question du déchiffrage se posait alors de façon simple : que le signe fût figuré ou au contraire puisé dans ceux préexistants, les premiers lecteurs du texte symbolique le reconnurent d'abord comme spécifique, c'est-à-dire qui ne fût pas un chiffre. Combinatoirement cependant, et contrairement en effet aux signes opératoires ultérieurement introduits (Cf. chapitre 4 : *Formes élémentaires*), ces signes ne créaient aucunement, par leur présence, deux places dans la ligne d'écriture, et pouvaient en principe se rencontrer seuls. En une dénomination provisoire, nous appellerons ainsi *primitifs*, ceux des signes initialement destinés à valoir pour des inconnues; c'est autour d'eux que se construisit initialement chez Diophante le premier système symbolique. Ce n'est qu'au XV^e^ siècle qu'il devint peu à peu clair que tout signe primitif avait vocation combinatoire à occuper l'une des places ouvertes, créées par un signe opératoire.

---

12 Oeuvres de Cardan . Lyon. 1663, IV, 297 . Cité dans CAJORI, I, 117. Les différences entre les éditions de l'*Ars Magna* de 1545 (Nuremberg) , 1570 (Bâle) et celle des Oeuvres Complètes de 1663 (Lyon) sont minutieusement inventoriées par WITMER, T.R . dans son remarquable *The Great Art, or the Rules of Algebra,* by Girolamo Cardano. The M.I.T. Press. Cambridge. Massachussets. 1968. Des différences qui ne portent pas sur le texte symbolique.

13 Trente deux carrés plus seize unités, plus une puissance quatrième, égalés à quarante huit choses ($32\,x^2 + 16 + x^4 = 48\,x$, en termes post- cartésiens).

14 *Signs for Unknown Numbers*, in CAJORI, I , 379-384.

3.4. Signes ou marques ?

Au-delà du déchiffrement et en dépit des apparences, l'interprétation des signes primitifs se révéla moins simple que prévu, suscitant un problème initial de fond, dont la solution n'apparut que lentement. Un signe primitif devait certes être interprété comme témoignant de la présence de l'Inconnu. Ceci cependant pouvait être diversement compris : soit comme une *marque* de l'Inconnu, c'est-à-dire l'indication de la permanence de ce qu'il est, dans le calcul, quelque chose d'inconnu, qu'il s'agit donc d'un "problème" où tout n'est pas donné; soit comme la valeur d'une grandeur, permanente dans le texte, mais inconnue. Si dans les deux cas, il s'agit bien, conformément à la règle d'univocité, de l'indication d'une "mêmeté", c'est l'objet de celle-ci qui est différemment conçu : soit par le fait que le texte recèle continûment une part d'inconnu dans sa structure, soit parce qu'il contient une substance inconnue. Si la seule seconde interprétation nous paraît aujourd'hui aller de soi, la confusion entre les deux conceptions est à la fois constante et implicite chez Diophante qui, comme le note Cajori [15], n'utilise jamais qu'un seul signe pour désigner l'inconnue (ou l'Inconnu). La chose est piquante quand on sait à quel point dans ses Six Livres d'Arithmétique, Diophante multiplia les exemples où il est plusieurs inconnues au sens moderne [16]. Comme le note Heath [17], cette limitation à une seule marque, ou signe, pour l'inconnu -impliquant une confusion entre les genres- limita fortement les capacités opératoires de l'algèbre diophantienne. Diophante a certes pu croire à la pertinence de la première des interprétations, dans la mesure où, dans deux textes différents, il était en droit d'utiliser le même signe d'Inconnu, différemment interprété. En vérité, Diophante, pour qui le ς est à la fois un signe et une marque dans le texte - signe d'une grandeur inconnue d'une part, marque d'Inconnu, d'autre part - se trouva ainsi contraint à ce que nous considérons aujourd'hui comme de véritables acrobaties dans le calcul.

Une confusion qui ne fut cependant plus tenable, dès lors qu'emportés par les nécessités des questions qu'ils voulaient

---

[15] CAJORI, I, 74.

[16] Par exemple : "Trouver trois nombres tels que le nombre solide issu de ces nombres augmenté de chacun d'eux, forme un carré." Livre IV, Problème XXII. Ver Eecke, *Diophante*, op. cit, 139.
En termes modernes : Trouver trois nombres x, y, z tels que $x.y.z+x$ et $x.y.z+y$ et $x.y.z+z$ soient des carrés d' entiers.

Diophante trouve $x = 1$; $y = \frac{34}{6}$; $z = \frac{2\frac{1}{2}}{6}$ $(= \frac{5}{12})$

[17] HEATH, *Greek*, II, 461 : "Cette limitation [sq. à un signe unique pour l'inconnu] rendit sa procédure souvent très différente de notre travail moderne ."

résoudre, les géomètres Hindous [18], les premiers, décidèrent de représenter plusieurs grandeurs inconnues. Toutes inconnues, mais cependant distinctes, elles conservaient chacune sa substance au travers d'un même calcul. Dans ces conditions donc, la rencontre dans l'écriture de deux signes primitifs différents, tous deux à interpréter comme Inconnu, renvoyait le lecteur à cette interprétation obligée : il y avait deux grandeurs permanentes, distinctes, à la valeur inconnue. Les Hindous furent suivis par les Européens, au Moyen-Age et à la Renaissance, en sorte que la représentation par signes distincts individualisant les inconnues devint usuelle aux XV^e et XVI^e siècles, chez tous les grands auteurs, cossiques ou Italiens, chez Stiefel [19] comme chez Cardan. Ainsi de deux inconnues auxiliaires, de signes A et 2e., dans ce problème de recherche de nombres "en proportion continue" dans l'*Arithmetica Integra* (1544)de Stiefel [20] :

" 1 A + 1 2e. Est summa extremorum
1 A - 1 2e. Est summa medii.
2 A. Est summa omnium trium.
2 2e. Est differentia quam habent extremi ultra mediu." [21]

---

18 Tel Brahamagupta -il vécut au VII^e siècle après J. C.- qui utilisait des signes abréviatifs pour désigner un nombre d'inconnues pouvant aller jusqu'à six. Cf. CAJORI, I, 75.

19 Michael Stiefel (1487 - 1567) fut un représentant particulièrement éminent de l'école cossique, en Allemagne qu'il s'efforça de vulgariser, en particulier dans son plus important ouvrage, l'*Arithmetica Integra* (Nuremberg, 1544) qui connut de nombreuses éditions. Il enseigna le Cossique à l'Université de Königsberg en même temps que la théologie (il était un luthérien convaincu). L' *Arithmetica Integra* contient la première conjecture historique de l' *impossibilité* de la quadrature du cercle (cf. notre analyse dans SERFATI, *Compas*, op. cit, 198- 199).

20 Folio 313. Exemple extrait de CAJORI, I, 140- 141. Le texte complet en est donné en *fac simile* en annexe.

Une "proportion continue" était ce qu'on appelle aujourd'hui une progression géométrique. Une traduction de l'énoncé latin du problème de Stiefel est : "On demande de déterminer trois nombres en proportion continue tels que le produit de la somme des deux extrêmes par la différence entre cette même somme et le milieu donne 4335 . Et tels que le produit de cette même différence par la somme des trois nombres donne 6069."

21 " 1 A + 1 2e. est la somme des deux extrêmes. 1 A - 1 2e. est le terme médian. 2A est la somme des trois nombres. 2 2e. est la différence entre la somme des extrêmes et le milieu."

Sans se soucier de la proportion géométrique, Stiefel commence donc par définir deux inconnues auxiliaires, A et 2e. dont les doubles respectifs sont la somme des trois nombres et la différence entre la somme des extrêmes et le terme médian. En termes modernes, on a donc :

$2\ x.\ A + 2\ x^2 = 4335$ et $4\ x.\ A = 6069$, système non linéaire dont la résolution conduit Stiefel à : $x = \frac{51}{2}$ et $A = \frac{119}{2}$. Le terme médian vaut donc $A - x = 34$ et la somme des trois termes 85 . Reste à écrire que B, 34 , 85- B sont en proportion continue, c'est-à-dire

Si simple et nécessaire qu'apparait aujourd'hui ce principe de symbolisations distinctes pour des Choses diverses, il souleva néanmoins des difficultés considérables sitôt qu'il fallut en représenter les puissances (chapitres 8 et 9). D'un autre côté, la possibilité de cette représentation de plusieurs inconnues, individualisant ainsi la substance de chacune, eut, en retour, cette conséquence obligée : dans le cas d'une seule inconnue et d'un seul signe primitif, ce fut évidemment l'interprétation substantielle qui prévalut; la convention inhérente à toute représentation porta désormais, non seulement sur le caractère inconnu de la grandeur, mais sur la permanence de sa substance numérique. Au-delà de la constatation qu'il était quelque chose d'inconnu dans le calcul, la représentation symbolique se chargea ainsi d'une fonction supplémentaire d'individuation. En même temps, cette convention substantielle dégagea implicitement une première conception de la notion même de texte mathématique, lieu où devait persister une même interprétation des signes pour l'inconnue. En sens inverse en effet, dans ce qu'il considérait comme deux textes différents, le géomètre avait toute latitude pour utiliser deux fois le même signe primitif, qu'il pouvait interpréter chaque fois avec des significations indépendantes et différentes. Comme on verra au chapitre 7, Viète, au moyen des diverses lettres de l'alphabet latin, voyelles et consonnes différenciées, élargit à la représentation du donné cette faculté d'utilisation des mêmes signes dans divers contextes. Ainsi donc, ces signes pour l'Inconnu que nous avions d'abord appelés primitifs, jusqu'à la fin du XVI^e^ siècle, seront désormais désignés, à partir du XVII^e^, du terme générique de Lettres. Reprise par tous les successeurs de Viète, cette convention aurait été évidemment impossible, s'agissant de Chiffres et de signes opératoires, dont l'interprétation universelle etait censée s'imposer dans tous les contextes.

Au XVII^e^ siècle européen, tant la codification de l'inconnue par une Lettre, que son déchiffrage et son interprétation étaient usuels. On observera alors ceci : depuis Diophante, l' interprétation d'un signe primitif avait porté spontanément avec elle identification entre le Requis et l'Inconnu. Il était dans la nature des problèmes mathématiques de confondre en effet ce qui était inconnu avec ce qui était recherché. On attribuait ainsi aux signes concernés dans le texte, simultanément et sans ambiguïté, ces deux modalités

---

B (85 - B) = 34^2. L'équation du second degré fournit B = 17 , et 85- B = 68 . Les nombres cherchés sont donc 17, 34, 68.

coextensives de l' interprétation. Avec le temps cependant, se fit jour une dissociation entre les concepts de Requis d'une part, d'Inconnu d'autre part. Descartes en constitua dans la *Géométrie* le premier exemple historique : ce qui était inconnu dans le problème de Pappus (une certaine grandeur de signe y) n'y était pas en effet nécessairement recherché au sens alors usuel, c'est-à-dire l'objet d'une procédure inquisitoriale pour en déterminer la (les) valeur(s)[22], mais devait être seulement mis en relation avec une autre inconnue (de signe x).

3.5. De la racine à l'équation.

Que l'objet premier du regard et de l'attention du géomètre devint l'inconnue et son signe, telle fut une autre conséquence de la symbolique diophantienne. La procédure était dès lors inquisitoriale : trouver le requis inconnu. Par les divers procédés algébriques, le géomètre était conduit à une relation, une équation le plus souvent, dont l'écriture en termes purement symboliques se développa peu à peu. Si la résolution de l'équation était possible, dans le respect des règles du calcul, elle conduisait ultimement le géomètre à affecter au signe pour l'inconnue une valeur numérique, c'est-à-dire à lui fournir une interprétation. Le fait que l'équation se trouvât admettre plusieurs solutions fut primitivement considéré comme un fait non-signifiant, anecdotique ou regrettable, et sur lequel il fallait, en tous cas, éviter de s'appesantir. Diverses considérations annexes faisaient en effet que les "autres" solutions, considérées comme parasites, étaient successivement écartées, telles les "racines fausses"[23], au profit de "la" racine, dont l'existence et l'unicité avaient été dès le début postulées, et qui avait été continument recherchée à ces deux titres. Pour étrange qu'elle apparaisse aux mathématiciens contemporains, cette position est cependant toujours usuelle chez les physiciens d'aujourd'hui, eux qui, placés devant une équation, en recherchent "la solution physique". De même, au XVI^{e} siècle mathématique, l'objet primordial de la recherche était "le" requis, et l'équation, seulement un moyen contingent de le déterminer. En termes de représentation symbolique, l'objet principal de l'examen était donc une Lettre. Cette primauté de la place de la racine sur celle de l'équation est particulièrement nette dans l'*Ars Magna* de 1545.

---

22 Cf. A.T, VI, 399. par exemple, à la grandeur inconnue de signe y , Descartes associait en fait une
48 autre grandeur également inconnue, de signe x et recherchait une relation entre les deux grandeurs. Ce qui était effectivement requis était donc une relation, c'est-à-dire en termes modernes une structure.

23 Nous les dirions aujourd'hui négatives.

Avec l'avènement de l'écriture symbolique cependant, un glissement se fit jour qui, entre racine et équation, peu à peu renversa les rôles : c'est l'équation en tant que telle qui fut l'objet premier de l'attention, de la recherche et de la visée du géomètre, cependant que la (ou les) racine(s) qu'elle pouvait le cas échéant contenir, se muait en un objet second et dérivé. La problématique primitive avait été de former une équation qui permît de déterminer une grandeur inconnue. Avec le renversement des positions institué au XVIe siècle, ce fut l'équation constituée qui passa au premier plan, et ses éventuelles racines, alors dénommées solutions [24], au second. Combinatoirement, la forme propositionnelle (Cf. chapitre 6 : *Adéquation et Propositionnelles)* remplaça donc la Lettre comme objet premier de l'examen. Se développèrent alors, dans la première moitié du XVIe siècle, à la suite d' Harriott et de Descartes, des questions inédites, qui faisaient toutes référence aux équations *per se* : nombre de racines d'une équation donnée, ou bien nombre de ses racines plus grandes qu'un nombre fixé, signes de celles-ci, ou encore, comme chez Descartes, examen de l'alternance de leurs signes [25]. Cette objectivation de l'équation, aujourd'hui usuelle, nous paraît avoir été un point de clivage obligé entre la pensée mathématique et la pensée physicienne.

3.6. Chiffre et chiffres.

Nous terminerons par deux commentaires, sur les chiffres d'une part, la représentation symbolique des nombres de l'autre. Au XVIe siècle en Europe, après de nombreuses péripéties [26] le système des chiffres en vigueur s'était stabilisé, selon ce que nous en connaissons aujourd'hui : dix signes indo-arabiques de forme quasi-définitive, incluant le zéro. La représentation des nombres entiers se faisait aussi dans le système décimal - positionnel que nous utilisons de nos jours. Dans ces conditions donc, le calculateur voulant représenter un nombre entier inscrivait dans la ligne, selon le fil du texte, une simple concaténation de chiffres. Nous appellerons dans la suite *Chiffre pur* toute semblable concaténation; quelle qu'en fut sa longueur, elle était symboliquement permise. Combinatoirement, la collection des dix chiffres fut ainsi le seul ensemble de signes à jamais présenter, dans le système symbolique, cette propriété de juxtaposition complète. Au déchiffrement, tout Chiffre pur présent dans une forme symbolique, comme 24579, dans :

$$24579 + 13$$

24 Le terme de "résoudre " était originellement pris en son sens étymologique : décomposer.
25 A.T, VI, 446.
26 Cf.GUITEL G *Histoire comparée des numérations écrites,* op. cit.

était ainsi lu de la gauche vers la droite [27], le premier chiffre étant 2, le dernier (9) reconnu comme tel, puisque suivi d'un assembleur, et signalant ainsi la fin du Chiffre. En décrivant la ligne en sens inverse du fil du texte, la concaténation était alors positionnellement interprétée, comme d'ordinaire, selon un nombre entier écrit dans la base dix : neuf unités, à quoi s'ajouteront sept dizaines, etc..., deux dizaines de milliers enfin. Si immédiate qu'elle nous apparaisse aujourd'hui, cette interprétation aura cependant requis deux aspects distincts et liés, position et décimalité, dont la conjonction signifiante n'était nullement allée de soi des siècles durant. Une signification qui était cependant devenue universelle au XVIe siècle. Et jusqu'à Leibniz, l'idée même de la coexistence de deux conventions quant aux Chiffres apparut ainsi inconcevable, ce que souligne André [28]. Leibniz, au contraire, apportera une autre interprétation, radicalement différente, sur ces mêmes Chiffres : celle d'une grandeur *positionnée* [29].

D'un autre côté, la représentation des nombres décimaux non entiers [30] utilisa de façon naturelle, pour séparer la partie entière de la partie décimale, un signe supplémentaire que l'on puisa le plus souvent dans les ponctuations de l'écriture rhétorique,

---

27 Selon ce que nous appellerons ci-dessous *le fil du texte* (section 4. 2 : *Fil du texte et places*).

28 ANDRE, op. cit. § 499, 200. "Nous n'avons à choisir pour écrire les nombres entiers, ni les chiffres, ni la manière de les assembler. L'idée ne pourrait venir à personne de changer pour les calculs, ni les figures de nos chiffres, ni les règles de notre numération écrite."

29 Ce sera une grandeur quelconque, non nécessairement entière. Dans son ébauche de 1678 de ce qui est aujourd'hui les déterminants (cf. M. S., VII, 5- 7), Leibniz emploiera en effet des Chiffres pour représenter symboliquement ce qu'on pourrait appeler la multiple position. Une représentation qu'il utilisera de la même façon, que ce soit dans l'écriture d'un polynôme à plusieurs inconnues, ou bien dans celle d'une famille de polynômes en une même inconnue : le coefficient de la puissance quatrième dans le troisième polynôme par exemple est par lui simplement désigné au moyen du Chiffre pur 34 , qui s'interprète donc comme une grandeur quelconque positionnée. Cette innovation symbolique constitue une part importante de la *Nova Algebrae Promotio* (M. S., 154 - 189 et particulièrement 161- 173), un texte auquel Leibniz tenait particulièrement. Il était un peu naïvement fier d'avoir encore une fois su dépasser Viète : alors que l' invention majeure de ce dernier avait en effet consisté à introduire des Lettres à la place de Chiffres dans l'écriture symbolique cossique, lui-même, Leibniz était parvenu à retourner encore une fois la situation, substituant cette fois des Chiffres à la place de Lettres. Dans cette opération, il voyait un effet de sa Charactéristique : *Reperietur autem hoc attentaturis ; nihil aliud esse Calculum circa magnitudines Analyticum, quam exercitum artis Combinatoriae sive Speciosae generalioris, forma seu quantitates (quatenus scilicet distincte concipiuntur) et relationes harumque similitudines tractantis per notas, quam Algebra literalis a Vieta introducta applicat ad habitudines quantitatum atque adeo Arti Combinatoriae subordinata est . Speciosa autem generalis ipsa est Ars characteristica, in unam cum Combinatoria disciplina confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesantantur* . (M. S., VII, 159) .

50 30 La précision est nécessaire, car, au sens strict, un nombre entier est aussi un nombre décimal (de dénominateur égal à l'unité). Pour faire court dans la suite, nous appellerons néanmoins nombre décimal tout rationnel *non entier* dont le dénominateur est une puissance de dix.

et qui fut, selon les époques et les auteurs, la virgule ou le point [31], comme dans :

23 , 5074

Au moment du déchiffrement, la virgule était aussitôt reconnue comme signe spécifique de séparation, associée à une certaine représentation de nombre en base dix. Elle créait alors deux places, chacune d'elle occupée par un Chiffre pur. A l'amont, conformément au schéma *supra*, le Chiffre était lu et interprété comme nombre entier : la partie entière du nombre considéré. A l'aval, il en représentait la partie décimale et était alors interprété selon le fil du texte : cinq dixièmes, à quoi ne s'ajoutent aucuns centièmes, mais sept millièmes, etc... Tout comme les assembleurs, la fonction combinatoire de la virgule aura donc été la création de deux places, qui devaient être impérativement occupées par des Chiffres purs. Ainsi, les propriétés combinatoires de ces concaténations, virgule accompagnée de deux places destinées à des Chiffres purs, sont-elles celles des assemblages de premier niveau décrits au chapitre 4 (*Formes élémentaires*) qui suit. En résumé, tout Chiffre était donc interprété au XVI^e^ siècle comme un nombre écrit en base dix, avec partie entière et partie décimale. Depuis le XIX^e^ siècle et particulièrement de nos jours, si les interprétations de la virgule se sont diversifiées et élargies, par exemple dans la représentation de couples d'éléments [32], elle a conservé sa syntaxe combinatoire.

---

31 CAJORI, I consacre plusieurs paragraphes (pages 323- 331) à la question de la *decimal separatrix*, qui eut une bien curieuse histoire.
32 (a, b), où a et b sont les signes d' éléments d'un ensemble, de signe E.

ANNEXES AU CHAPITRE 3

Annexe 1 . Nombres en proportion continue chez Stiefel.

Quærantur tres numeri continue proportionales, ita ut multiplicatio duorum extremorum, per differentiam, quam habent extremi ſimul, ultra numerum medium, faciant 4335. Et multiplicatio eiuſdem differentiæ, in ſummam omnium trium faciat 6069.

1 A + 1 2e. Eſt ſumma extremorum.
1 A — 1 2e. Eſt ſumma medij.
2 A. Eſt ſumma omnium trium.
2 2e Eſt differentia quam habent extremi ultra mediũ.

Itaq; 2 2e multiplicatæ in ſummam extremorum, id eſt, in 1 A + 1 2e. faciunt, 2 2e A + 2 ȝ. æquata, 4335. Deinde 2 2e multiplicatæ in 2 A ſeu in ſummam omnium, faciunt 4 2e A æquata 6069.

Confer iam duas æquationes illas. Nam ex priore ſequitur quòd 1 2e A faciat $\frac{4335 - 2ȝ}{2}$ Ex poſteriore autẽ ſequitur quod 1 2e A. faciat $\frac{6069}{4}$. Sequitur ergo quod $\frac{4335 - 2ȝ}{2}$ & $\frac{6069}{4}$ inter ſe æquentur. Quia quæ uni & eidem ſunt æqualia, etiam ſibi inuicem ſunt æqualia. Ergo (per reductionem) 17340 — 8 ȝ æquantur. 12138. facit 1 ȝ. 650 $\frac{1}{4}$ Et 1 2e. facit 25 $\frac{1}{2}$.

Reſtat iam ut 1 A. etiam reſoluatur, facit autem (ut paulo ſuperius uidimus) 1 2e A. $\frac{6069}{4}$. Cum igitur duo illa inter ſe ſint æqualia, Diuide utrunq; per 1 2e. tunc inuenies 1 A. æquari, ſeu facere. $\frac{6069}{102}$. Cum autem 1 2e faciat 25 $\frac{1}{2}$. facient 4 2e. 102. Itaq; 6069. diuiſa per 102. faciunt 59 $\frac{1}{2}$. Et tantum facit 1 A. Quare 1 A — 1 2e. id eſt, medius numerus facit 34. Et 1 A + 1 2e, id eſt, ſumma duorum extremorum facit 85. Iam igitur oritur noua quæſtio hæc.

Diuidantur 85 in duas partes, ita ut 34 mediet inter eas proportionaliter.

Sic ſtant numeri.

1 B. 34. 85 — 1 B.

Vnde 85 B — 1 B ȝ æquatur 1156. Facit 1 B 17. Et ſic ſtant numeri exempli. 17. 34. 68.

KK Exem

Commentaire de Stiefel sur l'Arithmétique de Cardan dans l'*Arithmetica Integra* de 1544 (fol. 313). Le document est emprunté à CAJORI, I, 141. Il s'agit de la recherche de nombres en proportion continue, problème complètement analysé en 3.4 (note de bas de page).

Annexe 2 . L'*Algebra* , de Clavius.

62 Tres habent pecuniam. Primus reliquis dicit, si adhuc haberem 100. aur. fieret mea summa aequalis duabus summis vestris. Secundus reliquis dicit, si haberem adhuc 100. aur. summa mea esset vestra summa dupla. Tertius denique ait ad reliquos, si adhuc haberem 100. aur. summa mea fieret summa vestra tripla. Quaeritur, quantum quisque habeat. LXII.

PONATVR primi summa 1 ℞. Ergo cum 100. habebit 1 ℞ + 100 ac tanta erit summa secundi & tertij, omnesq. tres habebunt 2 ℞ + 100. Ponatur summa secundi 1 A. Ergo cum 100. habebit 1 A + 100. qui numerus duplus est summae primi ac tertij, quae est 2 ℞ + 100 — 1 A, (quia cum omnes tres habeant 2 ℞ + 100. si tollatur 1 A, summa videlicet secundi, remanebit summa primi ac tertij 2 ℞ + 100 — 1 A.) Ac proinde aequatio erit inter 1 A + 100. & 4 ℞ + 200 — 2 A. Additisq. 1 A, vtrobique, inter 3 A + 100. & 4 ℞ + 200. Et ablatis 100. vtrinque, inter 3 A, & 4 ℞ + 100. Si ergo omnia diuidantur per 3. erit aequatio inter 1 A, & $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Ac proinde cum secundus positus sit habere 1 A, erit eius summa $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. Ponatur denique summa tertij 1 B. Ergo cum 100. habebit 1 B + 100. qui numerus triplus est summae primi ac secundi, quae est $\frac{7}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. conflata ex 1 ℞ summa primi, & $\frac{4}{3}$ ℞ + $\frac{100}{3}$. summa secundi. Igitur aequatio erit inter 1 B + 100. & $\frac{21}{3}$ ℞ + $\frac{300}{3}$. hoc est, inter 1 B, + 100. & 7 ℞ + 100. Ablatisq. 100. vtrobique, inter 1 B, & 7 ℞. Ac proinde tertij summa, quae posita fuit 1 B, erit 7 ℞.

Xx 2 Itaq.

Fac simile de l'exemple 62 du Chapitre XXXI (page 347) de l'*Algebra* de Clavius (1608). Enoncé et début de la solution.

L'*Algebra* , l'un des ouvrages majeurs par lesquels Descartes se forma aux mathématiques à La Flèche, était au XVI^{e} siècle le dernier des grands traités de référence rédigé dans le système cossique qui avait gouverné les siècles précédents. Nous traduisons ainsi l'énoncé : "trois personnages ont de l'argent. Le premier dit aux deux autres : si on ajoute 100 à ce que je possède, j'ai ce que vous avez à tous deux. Le second dit aux deux autres : si on ajoute 100 à ce que je possède, j'ai le double de ce que vous avez. Le troisième dit : si on ajoute 100 à ce que je possède, on obtient le triple de ce que vous avez. On recherche ce que chacun possède."

Clavius introduit deux inconnues seulement, de signes ℞ et A , sommes possédées par les deux premiers personnages, et obtient un système linéaire. La traduction du début du texte est alors :

" Appelons ℞ la somme possédée par le premier. Donc, si on lui ajoute 100, on aura 1. ℞ + 100 et ceci sera égal à la somme possédée par le second et le troisième ; à eux trois, ils auront donc 2 ℞ + 100 . Appelons 1.A la somme possédée par le second. En ajoutant 100, on aura 1.A + 100 , qui est le double de la somme du premier et du troisième, c'est-à-dire 2 ℞ + 100 - 1.A (parce qu'ils possèdent à eux trois 2 ℞ + 100 , si on enlève 1. A , il restera 2 ℞ + 100 - 1.A). Il y aura donc équation entre 1.A + 100 & 4 ℞ + 200 - 2.A , etc... "

On trouve pour sommes respectives $\frac{100}{11}$, $\frac{500}{11}$, $\frac{700}{11}$.

3 . L'Inconnu et ses signes.

Première partie :
Le système.

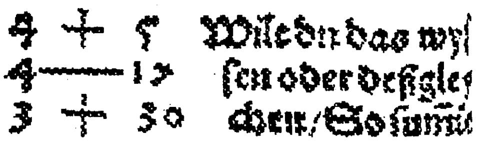
Chapitre 4

Formes élémentaires.

4. Formes élémentaires.

4.1. La croix et le trait.

Nous examinerons d'abord deux exemples simples. L'un est emprunté à l'édition de1526 du *Behennde unnd hüpsche Rechnüg auff allen Kauffmanschafften* de Johann Widmann[1], le premier des traités imprimés d'Arithmétique, qui contienne les signes de la croix (+) et du trait (-) :


4 + 5 Wiltu das wys
4 — 17 sen oder desgle
3 + 30 chen/So sum

En marge, Widmann explique au lecteur sa notation, qui s'interprète ainsi : "Ajoutez le nombre 4 au nombre 5" (premier exemple), et "Retranchez le nombre 17 du nombre 4". [2]

Le deuxième exemple, à nouveau tiré de l'*Algebra* (1608) de Clavius [3], représente aussi des instructions d'addition ou de soustraction, mais manipule des expressions formées au moyen de signes cossiques d'inconnues. Du texte, nous extrayons cet exemple:

1℞-7

qui s'interprétait ainsi: "De la valeur de l' inconnue, retranchez le nombre 7."

Dans les deux cas, la visée de l'auteur est à nouveau simple et claire : fournir au lecteur la représentation symbolique d'une *instruction* élémentaire, c'est à dire d'une règle pour l'exécution d'une action ou opération (ici la soustraction) portant sur deux quantités, qui sont, soit des nombres connus, soit des grandeurs inconnues. Comme à l'ordinaire, c'est à des fins purement abréviatives - l'évitement de la répétition d'expressions récurrentes- que les auteurs introduisirent initialement ces assemblages, premiers et simples éléments d'une représentation symbolique. La démarche s'étendit de façon naturelle aux autres actions usuelles (multiplier, diviser, extraire une racine) introduisant chaque fois un signe spécifique. Viète, l'appliqua aussi

1 Cité dans CAJORI, I, 128- 130. Widmann (1462 - 1526) était un auteur pré-cossique. La première édition de son *Arithmétique* parut à Leipzig en 1489.

2 On trouvera en annexe un *fac simile* de la page 32 complète.

3 Rome. 1608, op.cit. L'exemple est tiré du Chapitre III.

ultérieurement aux données indéterminées, qu'il représenta par des consonnes (Cf.chapitre.7 *Viète etl'Indéterminé*).

La représentation effective des opérations requérait chaque fois l'introduction de signes nouveaux, telle la croix. Nécessairement en effet, les signes devaient être choisis en dehors du magasin général de ceux qui préexistaient pour représenter les nombres ou les grandeurs, connues ou inconnues : des signes non littéraux donc, ni numériques, ni même cossiques furent ainsi créés; ils seront ci-dessous appelés figures symboliques (mathématiques), ou Figures, ou encore signes *figurés*. S'il développa une symbolique raffinée pour l'inconnue et ses puissances Diophante au contraire utilisa fort peu de représentations pour les opérations. Ainsi, les premiers signes historiques modernes pour l'addition et la différence (la croix et le trait) apparurent-ils simultanément à la fin du XV^{e} siècle seulement. Longtemps ils furent en concurrence sévère avec d'autres signes, en une histoire complexe décrite par Cajori [4]. En particulier, ils ne furent aucunement adoptés par l'Ecole italienne du XVI^{e} siècle [5], mais par contre retrouvés et largement utilisés par Viète et Descartes. A la fin du XVII^{e} siècle, le système de signes ayant vocation à codifier les "quatre opérations" et l'extraction de racines était stabilisé conformément à celui aujourd'hui en vigueur. Dès lors, les textes mathématiques, ouvrages, articles et correspondances, se dispensèrent de tout préalable sur cette partie du système symbolique, comme cela était encore le cas au début du siècle, chez Clavius et Descartes. Ce fragment du sytème symbolique devint ainsi chose commune chez les mathématiciens, comme on l' observe dans toute la correspondance deLeibniz.

Ainsi placé devant des assemblages de signes tels

4 + 5

ou

1 2e- 7

le lecteur du texte se trouvait-il en situation de devoir déchiffrer, c'est-à-dire reconnaître la structure combinatoire, puis interpréter, c'est-à-dire apporter des significations. En fait, il

4 *Signs of Addition and Substraction* in CAJORI, I, 229-250.

5 Elle utilisait le plus souvent des Lettres ou des signes pseudo- alphabétiques : $\tilde{p}$ et $\tilde{m}$ pour l'addition et la soustraction par exemple .

commençait par reconnaître une Figure, telle la croix. Sur la ligne d'écriture, un tel signe assignait alors nécessairement deux places, avant et après lui, que nous dirons amont et aval. En dehors de toute question de signification, un tel signe figuré avait donc pour fonction initiale de créer deux places qui lui étaient organiquement attachées, destinées à être ensuite occupées par d'autres signes, tous deux des Chiffres purs dans notre premier exemple. Ces préalables de déchiffrement appartiennent entièrement, comme on voit, au registre formel, combinatoire. Et semblable schéma de déchiffrement était nécessaire, hier comme aujourd'hui: ainsi est-il mis en oeuvre dans les logiciels évolués de calcul mathématique, tels *Mathematica* ou *Maple*. La croix était ensuite conventionnellement interprétée comme traduisant l'opération d'addition puis, à leur tour, les Chiffres interprétés comme des nombres. L'assemblage complet de signes s'interprétait alors spontanément, selon l'instruction précitée : "ajoutez le nombre de signe 4 à celui de signe 5". Le second exemple se déchiffrait pareillement selon :"De la valeur de l'inconnue, retranchez le nombre entierde signe 7".

4.2. Fil du texte, lieux,et places.

Ces deux exemples nous conduisent d'abord à commenter les conditions proprement graphiques du déploiement de l'écriture symbolique naissante. Au XVI^{e} siècle en Europe, la généralisation de l'imprimé comme support, définitif et véritable, du texte public, entraina l'écriture symbolique mathématique à épouser elle aussi les contraintes ordinaires de la typographie. A la notable exception de la barre de fraction (examinée ci-dessous au chapitre6 : *Adéquation et forme propositionnelles*), le déploiement graphique de l'écriture se fit initialement sur un niveau et un seul, que nous dirons la Ligne du texte. Comme dans l'écriture rhétorique, la Ligne était ainsi destinée à être déchiffrée de gauche à droite, selon une direction que nous appellerons le fil du texte, le changement de ligne à l'intérieur d'un même assemblage demeurant un signe sans signification. Contrairement à l'écriture rhétorique cependant, il était rare qu'un assemblage excédât dans la page la longueur d'une ligne. Conformément à l'organisation typographique, on considéra d'autre part la Ligne comme exactement constituée de la simple succession d' *emplacements* ou de *positions* consécutifs, chacun étant virtuellement destiné à être occupé par un signe et un seul. Lorsqu'un signe venait effectivement à une position donnée, celle-ci était alors son*lieu,* ce que les traitements informatiques dénomment aujourd'hui son adresse. Une information symbolique complète, relative au texte, était ainsi constituée par ces deux éléments : 59

nature et lieux de chaque signe. La nature du signe est en vérité sa spécificité, ou encore l'ensemble des différences qu'il présente relativement aux autres signes du magasin général; d'un autre côté, par lieux d'un signe, on entendra les positions qu'il vient occuper effectivement dans un texte donné. Cette structuration sous-jacente, linéaire et discontinue, du texte symbolique, initialement rendue nécessaire par la seule reproduction imprimée, ne manqua cependant pas de gouverner souterrainement les manuscrits à leur tour, dès lors que ceux-ci devinrent virtuellement susceptibles de pouvoir chaque fois être imprimés. Chaque signe effectivement présent dans le texte crée naturellement ainsi deux *places* dans la Ligne, avant et après lui, c'est à dire deux suites de positions vides, consécutives, potentiellement destinées à être occupées par d'autres signes, en nombre indéterminé. Pourchaque signe présent, on distinguera ainsi la place *aval*, à sa droite, de la place *amont*, à gauche.

4.3. Procédure ou résultat ?

Nos deux mêmes exemples nous conduisent aussi à revenir sur le statut de l'interprétation des écritures symboliques : procédure, comme nous l'avons dès le début postulé, ou résultat? Les intentions premières de l'auteur du texte avaient chaque fois été claires : il avait voulu coder une opération à effectuer, c'est-à-dire une action à exécuter, et non le résultat de celle-ci. Dans le premier des deux exemples, le résultat de l'effectuation est l'entier de signe 9. On peut cependant observer que les trois assemblages

3. 3 et 11- 2, ou encore 72 / 8

pour ne prendre que des instructions avec un seul signe opératoire, conduisent au même résultat, mais diffèrent quant à la procédure. Sur le plan formel, ici seul primitivement concerné, il convient donc de considérer les quatre assemblages comme différents. Sur le plan de l'interprétation, on note secondairement qu'ils sont associés à des propriétés arithmétiques distinctes de l'entier de signe 9.

Dans ce premier exemple cependant, le résultat de l'effectuation pouvait être communiqué à tous par un nombre explicite. Ainsi, dans toute situation mathématique où était rencontrée la concaténation 4 + 5, on pouvait la remplacer par 9. A partir d'exemples de ce premier type, certains géomètres purent donc croire que l'assemblage 4 +5 *s'interprétait* comme l'entier de signe 9. Une réflexion un peu courte, car la connaissance synthétique d'un résultat ne dispense certes pas de celle, spécifique, de son mode d'obtention. Encore s'agit-il d'exemples empruntés à la seule Logistique numéreuse, où l'explicitation est possible. Le second exemple, où figure un signe d'inconnue, est alors décisif : l' assemblage 1 $\mathfrak{X}$ - 7 ne peut en effet fournir un résultat communicable à tous tant qu'une valeur n'aura pas été attribuée à $\mathfrak{X}$, ce qui peut n'arriver que fort loin dans un calcul ultérieur, et le cas échéant, jamais. Cet assemblage comportant donc organiquement une effectuation suspendue, son interprétation devrait être ainsi précisée : "En supposant connue la valeur attribuée à $\mathfrak{X}$, retranchez le nombre 7 de cette valeur." Un type d'interprétation sur le mode hypothétique qui devait ainsi devenir la règle dans toute interprétation en Logistique. En conclusion, il convient de considérer que, dans tous les cas, la fonction première véritable de tous les assemblages élémentaires est, comme nous l'avions proposé au début de ce chapitre, d'assurer la codification d'une instruction d'exécution et non de la valeur du résultat, cette convention à l'usage du lecteur étant de surcroît conforme aux intentions initiales de l'auteur. Dans ces conditions cependant, cette règle n'assure pas la représentation, elle aussi évidemment indispensable, du résultat. Nous verrons au chapitre 5 (*Ambiguité de l'ordre et signes de délimitants)* comment l'emploi de signes d'agrégation, tels les parenthèses, permit à son tour la codification du résultat lui-même.

Une convention d'interprétation contraire (l'assemblage interprété comme résultat) fut cependant usuelle, sous des formes implicites, dans nombre de textes jusqu'à la fin du XVII^{e} siècle. En vérité, ces remarques mêmes, et cette division entre instruction et résultat de celle-ci, pourtant constitutives de l'interprétation du texte symbolique, sont tout à fait anachroniques : elles ne furent aucunement explicites au XVII^{e} siècle chez les contemporains, même chez Leibniz pourtant soucieux de catégorisations. Et l'absence corrélative chez Leibniz, de toute référence à ce que nous appelons maintenant la distinction entre le numérique et le fonctionnel, l'entraîna ainsi, à propos des fonctions et des quantités transcendantes, à ce qu'il faut bien rétrospectivement appeler des confusions conceptuelles [6], qui rendent aujourd'hui certains textes leibniziens bien difficiles à analyser: nous sommes en effet incessamment tentés de conclure anachroniquement qu'il y *manque* une distinction, c'est-à-dire un concept. D'une séparation implicitement assumée entre instruction d' exécution et résultat de celle-ci, naîtra peu à peu cependant, à partir

6 Par exemple, une fonction transcendante peut prendre des valeurs non transcendantes (*i.e* algébriques). Ce sont les mêmes errements qu'on retrouvera chez le premier Euler : Cf. notre analyse dans SERFATI, *Quadrature du Cercle,* op. cité. 43-48 (Leibniz) et 49-53 (Euler).

du milieu du XVIII[e] siècle, du fait d'Euler et Riemann, l'objectivation du concept moderne de fonction (en termes modernes, elle s'articule dans la différence entre le f (x) et le f), que Frege fut, à notre connaissance, le premier à mettre en forme philosophique dans *Fonction et concept* [7]. D'un autre côté, et pour en décrire le contenu avec précision, nous avons repris, en 7.9.2 (*L' objet d'une Forme renseignée)* la définition de ce que nous avons jusqu'ici appelé "résultat" d'une instruction : on y développera en particulier une distinction, seconde mais nécessaire, entre nature et substance du résultat.

4.4. Assemblages élémentaires.

Ainsi, pour représenter symboliquement les plus simples des actions mathématiques, les géomètres publièrent un certain nombre de Figures, que, dans leur fonction combinatoire, nous appellerons désormais des (signes) *assembleurs*, empruntant pour l'occasion un terme à Bourbaki [8]. Dès l'origine donc, la dualité signifiante entre objets et opérations fut transférée dans le système symbolique, de façon complètement inconnue dans l'écriture rhétorique. Il était ainsi deux catégories de signes, aux fonctions combinatoires différentes : d'un côté, les assembleurs, de l'autre les Lettres-Chiffres. Un assembleur devait voir ses places nécessairement occupées par des Chiffres ou des Lettres. Par contre, toute concaténation d'assembleurs, qui n'était pas un assemblage, ne pouvait être interprétée.

A l'aide des assembleurs, on constitua donc des assemblages *élémentaires* (ou de *premier niveau*). Les "quatre opérations" étaient ainsi représentées par des assemblages à deux places tels [9] :

---

7 Traduction de *Funktion und Begriff,* Iéna, 1891. Cet article est le texte d'une conférence prononcée devant la Société savante d'Iéna pour la médecine et les sciences naturelles le 9 janvier 1891. Il fut publié la même année à Iéna sous la forme d'un livret de 31 pages. Cf. la traduction de IMBERT C, *Ecrits logiques...,* op.cit, page 85.

8 BOURBAKI N, *Eléments de Mathématiques*. Masson. Paris. 1990. Chapitres 1 à 4 : *Théorie des Ensembles*. Bourbaki, qui ne se livre à aucune analyse "combinatoire" du texte, parle en vérité d'*assemblage*. (*Description de la mathématique formelle* : page E I.14)

9 Le point, la virgule et aussi l'absence de notation (le "Blanc " multiplicatif) furent trois des assembleurs interprétés comme multiplication. Cf. Leibniz à Hermann. 21 Juillet 1707 M.S., IV, 319 : "La multiplication n'a pas besoin de s'exprimer seulement par des croix, mais on peut écrire

a + b, l + m oumême

(a + b) (l + m),ce qui est pour moi la même chose que :

$$\overline{a+b} \times \overline{l+m}$$

62 J'ai l'habitude d'utiliser des virgules ou des parenthèses à la place des *vincula*. "

Jusqu'à Leibniz, la représentation de la division se fera essentiellement au moyen de la barre de fraction. Leibniz proposa, alternativement, les deux-points, employant l'un ou l'autre

$a + b$ ou $5 - x$ ou $\frac{2,5}{z}$, ou encore $2{,}531 \; . \; c$

dont les assembleurs étaient la croix, le trait, la barre et le point. De son côté, l'extraction de racines était symbolisée par un assemblage à une place, ou préhension, telle [10] : $\sqrt{45,234}$, avec le Vée pour assembleur.

Nous terminerons ici en anticipant les conclusions du chapitre 5 : s'il convient de considérer ces assemblages élémentaires comme les pièces ultimes, atomiques, de l'écriture symbolique, un texte mathématique ne peut néanmoins s'écrire seulement avec eux. Ils seront en effet nécessairement pris ultérieurement, soit dans des assemblages de niveau supérieur, (chapitre 5 : *Ambiguité de l'ordre et signes délimitants)*, soit dans des mises en relation comme l'adéquation (chapitre 6 : *Adéquation et formes propositionnelles*).

En regard de l'écriture rhétorique antérieure, l'écriture symbolique pourrait ici sembler présenter peu d'avantages, ou de différences, à l'exception de celle-ci, importante sur le plan formel : la fixité et la différenciation des places. La présence d'un signe assembleur délimite en effet dans la Ligne une ou deux places spécifiques. Des places qui sont fixes, et ne peuvent en aucun cas être modifiées, si peu que ce soit, sous peine de rendre le texte inintelligible ou ambigu. Dans ces conditions, et comme on l'a vu, le lecteur, dans la phase de déchiffrement, doit nécessairement commencer par reconnaître l'assembleur, puis les places qu'il délimite. Une nécessité de lecture par type de signe, qui contredit évidemment toute lecture naturelle selon le fil du texte. On pourrait certes objecter que, dans le cas d'une langue naturelle, on en fait de

---

des deux signes. Ainsi, dans *Mathesis Universalis*, M.S, VII, 54, il observe simplement : " Notae divisionis $\frac{a}{b}$ vel a : b "

Leibniz privilègia souvent l'emploi des deux-points, au motif qu'ils ne détruisent pas l'ordonnancement de la Ligne.

10 La théorie moderne envisage de façon générale des lois de compositions k-aires sur un ensemble quelconque Ω, où k est un entier naturel, c'est-à-dire des applications $\Omega^k \rightarrow \Omega$. Le cas où $k = 2$ (resp. $k = 1$) des lois *binaires* correspond au cas à deux places (resp. à une place : la loi est dite *unaire*). Les cas $k = 0$, correspond à des (fonctions) constantes. On peut évidemment envisager des lois ternaires et au-delà. La théorie des algèbres universelles traite des structures constituées par un ensemble et une famille quelconque de lois de composition sur lui, chacune ayant son "-arité". On pourra par exemple consulter WECHLER W. *Universal Algebra for Computer Scientists*, Springer-Verlag, 1992, remarquable par la variété de ses applications, aussi un ouvrage plus ancien et plus théorique, PIERCE, R.S, *Introduction to the Theory of Abstracts Algebras*, Holt, Rinehart and Winston, New-York, Chigaco, &... 1968.

même avec le verbe d'action et les groupes verbaux, qui doivent en premier lieu être identifiés. Il reste qu'ici, et même dans ce cas simple des assemblages élémentaires, la fixité et la différenciation des places présentent un caractère plus systématique et plus contraignant que dans la langue naturelle. Dans certaines écritures mathématiques hybrides, comme chez Tartaglia, se constituèrent néanmoins des blocs symboliques formés d'un seul assemblage de premier niveau, noyé dans une écriture purement rhétorique. On verra que semblable modalité d'écriture syncopée (au sens de Nesselmann), ne sera plus possible dans la pratique, dès lors que le niveau des assemblages impliqués sera au moins égal à deux, ou bien encore que l'égalité viendra à être symboliquement représentée.

4.5.

On distinguera dans la suite les assembleurs à deux places, d'avec les préhenseurs ou assembleurs à une place. Les uns et les autres sont supportés par des signes, qui sont, comme tels, pourvus d'attributs divers, matériels d'abord comme leurs formes graphiques et leurs éventuelles symétries. Un attribut commun à tous les assembleurs sera cependant leur caractère de Figure : ils devront être choisis, non seulement en dehors du magasin des signes utilisés dans la rhétorique (Lettres ou ponctuations), mais aussi des Chiffres. Les assembleurs à deux places, les plus usuels, seront parfois aussi simplement dénommés ci dessous assembleurs. Si donc, comme tout autre signe, un assembleur crée deux places, celles-ci seront ici considérées comme relevant de sa juridiction effective (une seule place étant évidemment concernée dans le cas d'un préhenseur) : nous dirons que ce sont les places *ouvertes* par l'assembleur. Les règles combinatoires sont alors celles-ci : dans un assemblage de premier niveau, les places ouvertes doivent être obligatoirement occupées, soit par une Lettre, soit par un Chiffre, c'est-à-dire par deux signes ou concaténations de signes qui ne sont plus eux-mêmes des assembleurs ni des préhenseurs. La fonction combinatoire première des assembleurs élémentaires sera donc de solidariser par son intermédiaire deux Lettres-Chiffres, d'en faire ainsi un agrégat dont il soit le centre. Celle d'un préhenseur est, de la même façon, de constituer un bloc agrégé, uniquement constitué, cette fois, de lui-même et d'une Lettre-Chiffre. Par extension, on verra, dans la section qui suit, comment la syntaxe combinatoire d'un assembleur quelconque se définira par la solidarité qu'il se doit d'assurer entre deux Formes.

On a ainsi successivement mis à jour trois aspects dans un signe. D'une part, sa matérialité, faculté intrinsèque,
64 qui s'apprécie dans ses attributs "physiques", comme sa forme

graphique, ou son appartenance à certaines sous-catégories du magasin général : lettre des divers alphabets (majuscule ou minuscule, premières ou dernières de l'alphabet considéré, voyelle ou consonne, chiffre, ou Figure). En second lieu, sa syntaxe combinatoire, c'est-à-dire l'ensemble des règles qu'il est assujetti à vérifier dans le cours de l'écriture symbolique : nombre de places ouvertes par exemple, niveau hiérarchique local (Cf. chapitre 5), légitimité de sa juxtaposition avec d'autres signes. Enfin, et dans un contexte donné, sa signification : la représentation d'une inconnue par exemple, ou d'un donné indéterminé, ou encore d'une action à exécuter.

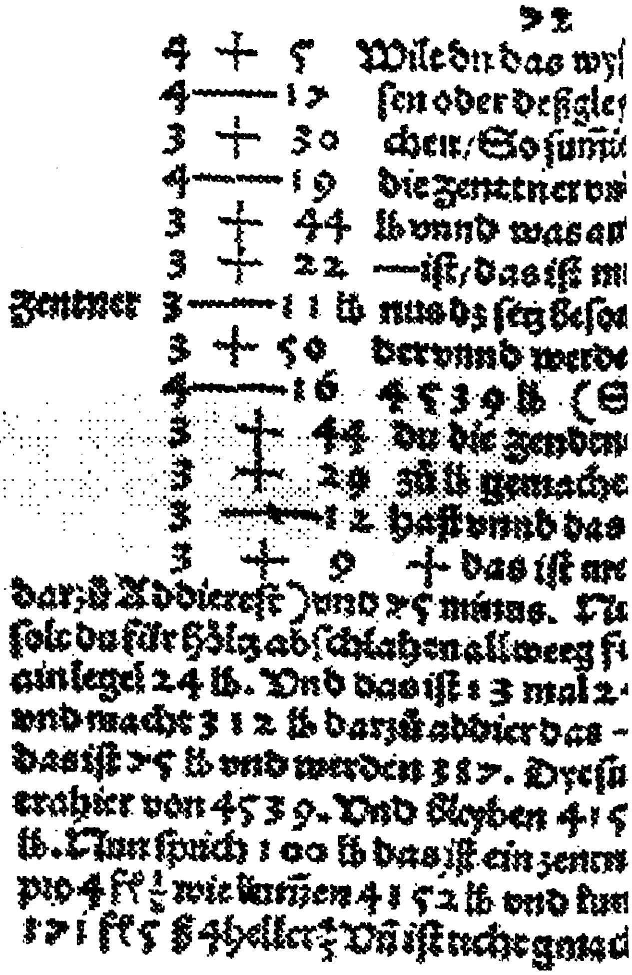
Cet inventaire en partie triple permet en retour d'envisager deux concepts dans un signe : combinatoire d'une part, signifiant de l'autre. Le concept combinatoire d'un signe est exactement constitué de la conjonction de deux éléments : sa matérialité et sa syntaxe. Tout assembleur est ainsi redéfini en un concept combinatoire. On décidera souvent d'indiquer le concept combinatoire d'un signe par une majuscule initiale, comme le Trait, la Barre, une Voyelle ou une Virgule : il s'agira donc, chaque fois, du nom du concept, c'est-à-dire de sa représentation dans l'écriture rhétorique. Ainsi parlera-t-on, par exemple, de la syntaxe de la Croix, et aussi du signe de la Croix, (c'est à dire +) : ce dernier est donc le signe matériel, avec son faisceau d'attributs intrinsèques, telle la double symétrie. La syntaxe est d'abord celle de tout assembleur à deux places. Elle est en outre constituée des règles hiérarchiques implicites spécifiques qui gouvernent son emploi (Cf. chapitre 5), et le distinguent du Point par exemple. En termes mathématiques modernes, la Croix, comme concept combinatoire, s'analyse ainsi comme le couple (matérialité, syntaxe). Ceci à propos d'un signe unique. Dans la suite, nous étendrons cependant ce même emploi des majuscules à certains autres concepts, comme la Ligne ou le Chiffre, dont le support est une concaténation de plusieurs signes, chaque fois qu'il nous semblera pertinent d'y envisager à la fois la matérialité et la syntaxe.

Réservée aux registres de la matérialité du signe et de ses aspects combinatoires, cette conceptualisation est indépendante des significations qui pourront être ensuite conférées au signe. D'un autre côté, nous verrons que, dans un même texte, diverses Clés d'interprétation pourront venir apporter des significations différentes à propos d'un même signe, créant chaque fois ce qu'on appellera un contexte. Dans un contexte fixé cependant, il devient possible de considérer le couple constitué par un signe matériel et par son interprétation, dont nous dirons qu'il organise 65
ainsi un autre concept, que nous appellerons, cette fois, le concept

signifiant du signe. Ainsi l'*Addition*, indiquée par une majuscule italique, sera donc exactement constituée d'un signe dans sa matérialité (par exemple +) et d'une signification (comme somme de matrices par exemple).

ANNEXE AU CHAPITRE 4

Annexe 1. La Croix et le Trait dans l'*Arithmétique* de Widmann .



Page 32 de l'édition de 1526 du *Behennde unnd hüpsch Rechnüg auff allen Kauffmanschafften* de Johann Widmann.Document extrait de CAJORI, I, 130.

4. Formes élémentaires.

Première partie :
Le système.

Chapitre 5

Ambiguïté de l'ordre

et

signes délimitants.

5. Ambiguïté de l'ordre et signes délimitants.

5. Ambiguïté de l'ordre et signes délimitants.

5.1. Instructions composées.

"Effectuer une multiplication, dont l'un des termes est le nombre de signe 3,5 , et l'autre le résultat de cette instruction élémentaire : ajouter au nombre de signe 2 le nombre inconnu de signe x. "Tel est le simple modèle - dénommé initial dans la suite- d'une succession de deux instructions élémentaires, à nouveau donc une instruction, qu'on dira composée, l'exemple étant ici dénommé de second niveau; nous prendrons pour un temps ce concept de niveau dans une acception intuitive, avant de le définir de façon précise à la fin du chapitre. En vérité, l'exécution d'une instruction isolée, élémentaire, - au sens que nous avons donné à ce terme - n'avait été aucunement un but en soi en logistique, mais le plus souvent un élément seulement d'une chaine d'instructions. Tout calcul véritable était ainsi composé d'une succession, ou superposition, d'instructions élémentaires, en un nombre qui, avec le secours de l'écriture symbolique, put, très rapidement, devenir important. Que les instructions composées aient été d'un usage universel est repérable dès les premiers balbutiements rhétoriques du Calcul. On montrera cependant, comment certaines des véritables spécificités de l'écriture symbolique apparaîtront seulement au moment où l'on envisagera de représenter des instructions composées de niveau élevé.

Dès qu'il fut en possession des techniques de représentation symbolique de l'inconnue et des opérations (telles que décrites aux deux chapitres précédents), le géomètre, en un temps second aura eu naturellement pour objectif de représenter dans le registre symbolique la suite d'instructions précitée, conformément aux règles édictées : il disposait à cet effet des trois signes ou Chiffres :

2 et x et 3,5

La codification de l'instruction d'addition était évidemment 2 + x. En décidant de confondre résultat et procédure (Cf. 4.3 : *Procédure ou résultat ?*), le résultat avait encore pour signe 2 + x , qu'il fallait multiplier par le nombre de signe 3,5 en utilisant le Point comme assembleur. Conformément au schéma de représentation des instructions élémentaires, le géomètre pouvait donc croire qu'afin de représenter la multiplication des deux expressions, il suffisait de faire occuper chacune des places ouvertes par le Point, par 2 + x d'une part, par 3,5 d'autre part, et donc d'écrire :

$$2 + x \,.\, 3{,}5$$

Il est cependant immédiat que cette écriture codifiée est ambiguë au déchiffrement. En termes combinatoires, le même assemblage peut en effet légitimement être lu en effectuant d'abord un premier groupement, autour du Point (pour obtenir x . 3,5), puis le groupement second autour de la Croix. En termes signifiants, l'assemblage peut donc être également interprété comme :

"Multiplier le nombre de signe x par le nombre de signe 3,5. Ajouter l'entier de signe 2 au résultat."

Deux interprétations qui ne coïncident évidemment pas. Depuis le seul examen de l'écriture symbolique, il n'existe cependant aucune règle qui prescrive un choix entre les deux suites d'instructions, c'est-à-dire vienne indiquer celui des deux assembleurs que le géomètre aurait voulu voir considérer en premier. Là où l'écriture rhétorique avait été précise, mais laborieuse, dans sa désignation d'un ordre de succession des opérations, celle des écritures symboliques qui aurait naturellement paru la plus appropriée à la représentation est donc fautive, puisqu'incapable de discriminer entre deux lectures incompatibles. Une telle concaténation de signes faisant échec à la règle d'univocité, il était en conséquence impératif de lever l'ambiguïté ainsi inscrite. Une obligation qui ne sera cependant pas initialement venue du registre des significations, savoir la transcription symbolique- toujours contingente- d'une visée mais d'une nécessité absolue, propre à la représentation symbolique même. Pour lever l'ambiguïté, les géomètres inventèrent alors un moyen détourné : un système de signes auxiliaires délimitant dans la Ligne l'ensemble de tous les signes associés à un même assembleur. Dès les premiers développements de l'écriture symbolique, une grande variété de tels signes furent ainsi successivement utilisés. On en citera trois principaux : la barre horizontale ou *vinculum* [1], soulignant ou surlignant, les points séparateurs, les parenthèses enfin. Ainsi, pour l'exemple cité, Bombelli, dans le manuscrit de l'*Algebra* , [2] aurait écrit :

$$\underline{2\ \mathrm{p}\ \mathrm{x}.}\ 3,5\,.$$

Descartes, dans les *Excerpta Mathematica* : . 2 + x . . 3, 5

Leibniz ou Newton : $\overline{2 + x}\ .\ 3,5$

Enfin, aujourd'hui : (2 + x) . 3,5

L'usage des parenthèses rondes pour indiquer la délimitation fut rare avant le XVI^e siècle, l'une des premières

---

1 Le lien.

2 On a donné en annexe un *fac simile* du manuscrit de l'*Algebra* de R. Bombelli, extrait de CAJORI, I, 128.

occurences se repérant dans l'*Algebra* de Clavius. Quoiqu'il en fût du système adopté, on obtenait ainsi une concaténation de signes ayant vocation à être un assemblage de second niveau. Il est cependant clair que ce qui vient d'être dit de la Croix pouvait être appliqué au Point, de sorte que l'on devait ici écrire :

$$((2+x) \cdot 3{,}5)$$

5.2. Signes délimitants.

Dans ces assemblages de signes de second niveau, contenant donc deux assembleurs, la fonction combinatoire première des signes auxiliaires, quel qu'en ait été le type, fut donc la délimitation de la partie de la Ligne contenant l'ensemble de tous les signes associés à un même assembleur. Ceci demande une explication supplémentaire que, pour faire bref, nous exposerons dans le cas d'assembleurs à deux places. On a décrit au chapitre précédent comment un assembleur élémentaire (tel la Croix) créait dans la Ligne deux places ouvertes - avant et après lui le plus souvent - destinées être occupées par une Lettre-Chiffre. D'un autre côté, dans le présent chapitre, on vient de voir comment un assembleur composé (tel le Point de l'exemple initial) créait pareillement deux places, cette fois destinées être occupées, soit par un assemblage élémentaire, soit à nouveau par une Lettre-Chiffre. Ces places sont différenciées : amont et aval de l'assembleur. Des termes qui ne fournissent cependant qu'une indication purement directionnelle : les places ne sont que des virtualités, des ensembles possibles de positions. Dans un assemblage composé effectif, les deux séquences ininterrompues de signes qui, dans les faits, seront venues occuper l'amont et l'aval d'un assembleur, constituent la totalité des signes sur lequel l'assembleur a en quelque sorte juridiction, combinatoirement parlant. Les positions alors occupées par les signes, à l'amont et l'aval, ainsi que par l'assembleur lui-même, s'analysent, dans la Ligne, comme le *territoire* de l'assembleur, lui-même subdivisé en deux sous-territoires [3]. Les signes auxiliaires auront donc eu simplement pour fonction première de délimiter le territoire de chaque assembleur, en en marquant les bornes. Ces signes désignent les deux positions, du début et de la fin de la partie de la Ligne concernée, son entrée et sa sortie si l'on préfère. Le couple constitué par la parenthèse ouvrante et la parenthèse fermante associée joua, à cet égard, le même rôle que celui des Deux -points de Descartes, ou encore des deux extrémités, gauche et droite, du *vinculum*. Ainsi pourvus de cette syntaxe combinatoire,

3 Mathématiquement, c'est un intervalle divisé en deux sous-intervalles disjoints.

nous désignerons désormais les signes considérés, par le terme de Délimitants, organisant ici un concept combinatoire. Le signe d'un Délimitant est alors, soit un couple de signes différenciés associés (parenthèse ouvrante et fermante), soit un seul signe comme le *vinculum.* Dans ces conditions donc, l'assemblage :

$$((2 + x) . 3{,}5)$$

est syntaxiquement correct. Il a été obtenu en adjoignant tous les Délimitants légitimes. La paire de parenthèses extérieures contient un assemblage de second niveau, et on pourra envisager l'assemblage de troisième niveau :

$$(((2 + x) . 3{,}5) : y)$$

dont il est un des composants. Ce dernier assemblage se trouve être doté de tous les Délimitants possibles : on le dira *dûment complété*.

Dans un assemblage dûment complété, les territoires de chaque assembleur sont en apparence dans l'écriture. Ceci prescrit un niveau à chaque assembleur, et donc un ordre de succession entre ceux-ci, c'est-à-dire précisément ce qui était recherché. Combinatoirement, le dernier exemple, de niveau trois, se décrit par trois territoires qui sont contenus les uns dans les autres, le plus vaste étant associé aux Deux-points, le plus petit à la Croix. On décidera d'y interpréter en premier l'assembleur de niveau un (la Croix), puis l'assembleur de niveau deux (le Point), enfin l'assembleur de niveau trois (les Deux-points). Sur cet exemple, l'emploi des Délimitants comme séparateurs a effectivement marqué la fin de l'ambiguïté dans l'écriture symbolique. Nous donnons plus loin un autre exemple de niveau deux, de nature cependant un peu différente, avant de formuler une définition plus générale en termes de niveaux et une règle universelle. Quoiqu'il en soit, dès lors qu'un ordre aux assembleurs, donc aux groupements, aura été ainsi prescrit dans le registre combinatoire, l'interprétation rhétorique devint à son tour non ambiguë : l'ordre trouvé pour les assembleurs fixe en effet l'ordre d'exécution des instructions dont ces mêmes assembleurs sont les représentants symboliques. Reprenant l'exemple initial, on interprétera ainsi : "Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe x. Multiplier ensuite le résultat obtenu par le nombre de signe 3,5." Cette interprétation aura été satisfaisante, puisque conforme à celle requise. Tout naturellement, l'interprétation des assemblages dûment complétés ainsi élaborés s'est donc trouvée être l'exécution d'instructions composées, c'est-à-dire d'une succession d'instructions élémentaires dans un ordre séquentiel prescrit. Entre l'expression rhétorique initiale de la visée du géomètre et l'expression, également rhétorique, de l'interprétation de l'écriture symbolique, on a cependant pu observer une inversion en quelque sorte naturelle de leur ordre de description. L'auteur avait avant tout voulu représenter symboliquement une multiplication, opération considérée par lui comme première, conceptuellement parlant; l'un des termes de la muliplication était cependant lui-même le résultat d'une instruction d'addition. De son côté, le déchiffrage par le lecteur de l'écriture symbolique a au contraire naturellement dû commencer par l'instruction d'addition, la seule immédiate à reconnaître, même si elle était conceptuellement seconde.

L'emploi des Délimitants s'est donc développé à partir du XVI[e] siècle, en même temps que l'écriture symbolique. On ne proposera pas ici un inventaire, qu'on trouvera dans Cajori [4], des systèmes de signes très divers avec cette fonction. Si l'emploi des parenthèses est rare avant le XVI[e] siècle, le *vinculum* fut particulièrement usité au XVII[e], par Leibniz par exemple dans *Mathesis Universalis* , ou Newton dans l'*Epistola Prior.* A l'exception du cas des radicaux où persiste le *vinculum*, le mode universel d'indication de la délimitation est aujourd'hui le couple de parenthèses associées (aussi les crochets ou accolades). Dans un texte des *Excerpta Mathematica* traitant de l'inscriptibilité des polygones réguliers, non daté, bien antérieur cependant à la *Géométrie* [5], le jeune Descartes utilisa -sans explication préalable- des points comme signes délimitants. Il suivait cependant là une tradition cossique, en vigueur depuis le XVI[e] siècle, et qui venait tant de Rudolff lui-même (*Coss* ; 1525) que de Stiefel (*Arithmetica Integra* ; 1544). Descartes écrit par exemple [6] :

$$\surd.2 - \surd 3.$$

L'ordre de succession entre les deux Vées, assembleurs à une place, interprétés par extraction de radicaux carrés, aura donc ici été indiquée par Descartes à l'aide de points, qui précèdent les Chiffres ou leur font suite. Rhétoriquement, l'interprétation est donc :

4 *Signs of Aggregation* in CAJORI, I, 384-400.

5 A.T., X, 286-287.

6 En signes modernes, la Forme doit être écrite $\sqrt{2 - \sqrt{3}}$. Descartes lui assigne, tout à côté, cette autre valeur : vel $\sqrt{\frac{3}{2}} - \sqrt{\frac{1}{2}}$ (Cf. CAJORI, I, 389. *Aggregation by dots).*

"Prendre la racine carrée de l'entier de signe 3. Retrancher ce résultat de l'entier de signe 2. Prendre la racine carrée de ce second résultat." Un assemblage de signes qui serait aujourd'hui écrit :

$$\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

Dans le même texte [7], Descartes utilisa encore des points pour représenter des assemblages radicaux plus complexes, tels

$$\sqrt{}.2 + \sqrt{}.2 - \sqrt{}.2 + \sqrt{}.2\ .$$

Dans la *Géométrie*, Descartes, abandonnant les points, indiqua systématiquement la délimitation -toujours sans explication- par une disposition typographique orthogonale à la Ligne [8].

5.3. Formes symboliques mathématiques .

Envisageons maintenant le cas d'un assemblage, toujours de second niveau, de type un peu différent :

$$(\ (3{,}5\ .\ x) - (2 + y)\ )$$

Le déchiffrement doit en être ainsi évidemment effectué : il est en premier lieu, c'est-à-dire avant le Trait, deux assembleurs, le Point d'une part, la Croix d'autre part, mais il n'est entre ces deux-ci aucune règle de succession prescrite; l'ordre de l'examen de ces deux assembleurs est indifférent. Tous deux doivent être seulement impérativement considérés avant le Trait. Nous dirons que le Point et la Croix sont *incomparables*, (une marque d'indifférence), cependant que le Trait est ici d'un niveau hiérarchique supérieur (marque de préséance). L'ordre prescrit à la considération des assembleurs, par l'adjonction des Délimitants dans l'écriture symbolique n'a donc pas été définitivement fixé par ceux-ci. Il est ici en effet deux ordres séquentiels d'exécution possibles, compatibles avec la délimitation. De façon générale, le système des Délimitants oblige seulement à certaines préséances et indique certaines indifférences, ceci étant dans la nature même de l'écriture mathématique.

---

7 A.T, X, 286. Notation moderne : $\sqrt{2+\sqrt{2-\sqrt{2+\sqrt{2}}}}$

8 Cf. par exemple A.T, VI, 399 et 415. Nous en donnons un *fac simile* en annexe.

Le déchiffrement ainsi effectué, et l'un des deux ordres étant choisi, une interprétation est alors : "Ajouter l'entier de signe 2 au nombre de signe y. Multiplier le nombre de signe 3, 5 par le nombre de signe x. Soustraire le premier des deux résultats du second." La fonction signifiante des parenthèses aura donc été d'objectiver le résultat partiel de chaque opération, d'en faire un bloc constitué, ayant vocation à être à son tour un objet pour des opérations de niveau supérieur. Conformément à la visée initiale, l'emploi des parenthèses comme Délimitants aura donc finalement conduit à la description non ambiguë d'une suite ordonnée d'instructions élémentaires. Ainsi pourvues de cette signification, les mêmes parenthèses seront alors dénommées des signes d'*agrégation*, le terme étant aujourd'hui usuel, Leibniz employant le terme de *comprehensio* . Comme nous l'expliquions en introduction, nous avons néanmoins estimé qu'une double terminologie était ici indispensable, le terme Délimitants étant reservé à la désignation des signes dans leur fonction purement combinatoire et formelle de jalonner le texte symbolique, indépendemment des questions de signification (le "groupement de termes") auxquelles renvoie "agrégation".

La comparaison entre les expressions rhétoriques d'une part (celles de la visée première ou de l'interprétation terminale), et l'écriture symbolique d'autre part, met en évidence deux privilèges de celle-ci sur celle-là, certes naturellement acquis, mais qui n'avaient aucunement fait partie des objectifs initiaux. Le premier tient en ceci : les conclusions précédentes, quant à la préséance ou l'indifférence dans l'ordre d'exécution des instructions n'avaient nullement été apparentes dans l'écriture rhétorique, alors qu'elles vont de soi dans l'examen synoptique de l'écriture symbolique. En fait, toute tentative d' analyse en termes de niveau, effectuée à partir de l'écriture rhétorique, serait bien difficile à concevoir et à décrire, même sur ce premier exemple, pourtant modeste.

La seconde remarque concerne la représentation des résultats intermédiaires. Sur l'exemple initial, on a déjà constaté que, dans l'écriture purement rhétorique, il avait été chaque fois nécessaire de désigner le résultat partiel obtenu après la première exécution (le "résultat"). Dans le cas de l'assemblage de second niveau de l'exemple initial, où il n'est qu'un seul résultat partiel, les choses ont été cependant si simples et l'écriture rhétorique si claire, que la représentation symbolique pourrait à bon droit en être considérée comme la simple abréviation. Dans le (très simple) deuxième exemple, il a fallu cette fois distinguer, le "premier 77 résultat", du "second résultat". Le géomètre s'exprimant rhétoriquement doit donc d'abord se souvenir qu'il est deux résultats distincts. Ces noms, "premier" et "second", cependant, ne restituent aucunement à la mémoire les contenus véritables des instructions dont ils sont issus. Symboliquement au contraire, les deux résultats peuvent être immédiatement distingués comme étant associés à (2 + y) et (3,5 . x) respectivement. Lorsque l'assemblage deviendra combinatoirement un peu plus complexe, comme dans le cas, ci-dessous analysé, de la résolution d'une équation du second degré, il pourra y avoir usuellement huit résultats partiels. Rhétoriquement, il faudrait se contenter de les désigner successivement, en les numérotant, depuis le premier jusqu'au "huitième résultat", une obligation qui est la rançon de l'absence des signes de délimitation dans l'écriture rhétorique. Dès lors que le nombre d'opérations enchevêtrées et hiérarchisées se fit un peu plus important encore, son énoncé en termes rhétoriques en devint impossible en fait, sinon en droit. Il y avait là un obstacle véritable au développement du calcul, que les géomètres du Moyen-Age et de la Renaissance ne pouvaient contourner, et dont témoigne par exemple l'*Ars Magna*. La succession d'un nombre d'instructions dont le niveau d'imbrication dépasse trois ou quatre (nombre tout à fait réduit si on le rapporte au plus modeste des calculs du XVIIe siècle, cartésien par exemple) ne se laisse pas rhétoriquement décrire de façon simple. Dans l'écriture symbolique au contraire, le contenu de chaque résultat partiel se lit très simplement, à partir de la concaténation de signes obtenue en adjoignant des parenthèses à l'assemblage initial. Chaque résultat partiel se distingue ainsi simplement des autres.

Ce point permet alors de revenir sur l'interprétation précédemment proposée pour les assemblages élémentaires; nous avions conclu au chapitre 4 que l'interprétation d'un assemblage de premier niveau, tel 2 + y, était nécessairement celle d'une procédure et non d'un résultat. A la lumière de ce qui précède, il apparaît en première analyse, qu'un tel assemblage, une fois dûment complété par des parenthèses, tel (2 + y), pourra, quant à lui, être interprété comme l'indication de la constitution du résultat de la procédure, que l'exécution puisse ou non en être effective. Dans ces conditions, l'interprétation rhétorique achevée de (2 + y) pourrait être : "Ajouter l'entier de signe 2 au nombre inconnu de signe y, et constituer le résultat." Lorsque l'effectuation ne peut être explicite, cas usuel où l'assemblage contient au moins une Lettre (signe d'inconnue), la "constitution" du résultat consiste dans les faits à disposer de celui-ci comme s'il était virtuellement exécuté, en un bloc constitué, qui pourra lui-même être l'objet de procédures ultérieures. Dans ces conditions où le résultat est ainsi constitué dans tous les cas, nous considèrerons en définitive que (2 + y) est en fait la *représentation symbolique même du résultat.* Ainsi donc, ces signes auxiliaires dont la fonction première, sur le plan purement formel, avait été de prescrire, par le moyen de la délimitation, un ordre de succession qui avait fait défaut dans l'écriture symbolique spontanée, se trouvèrent investis en retour, dans le registre signifiant, d'une fonction d'agrégation (des termes) et d'objectivation (des résultats).

Nous appellerons désormais forme symbolique mathématique, ou Forme, tout assemblage *dûment complété,* c'est-à-dire complété par tous les signes possibles de délimitation : ainsi 2 +(a . y)est un assemblage (de second niveau) et (2 + (a. y)) la Forme associée. Un terme choisi en référence à la Doctrine abstraite des Formes de Leibniz, dont l'Algèbre ne serait pour lui que l'application aux seules quantités [9] : "(...) totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae." Ainsi, un assemblage sera interprété comme une procédure et la Forme associée comme son résultat. Nous ne discuterons pas ici des conditions nécessaires et suffisantes pour qu'une concaténation de signes organisée avec des délimitants définisse une Forme syntaxiquement correcte. Une question en effet complètement anachronique au XVII^e^ siècle, qui n'est devenue pertinente que depuis une vingtaine d'années, dans la littérature mathématique des ensembles ordonnés [10], sous le nom de treillis de parenthésages; observons par exemple que dans toute forme syntaxiquement correcte, il doit y avoir autant de parenthèses ouvrantes que de fermantes. Un bref examen montrera cependant que cette condition nécessaire n'est pas suffisante [11]. Quoiqu'il en soit, placés devant une Forme *a priori* syntaxiquement correcte, nous pouvons désormais définir avec précision, de façon récurrente, le niveau de ses assembleurs : les premiers à être considérés sont ceux de premier niveau, c'est-à-dire ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant et sans qu'il existe d'autres assembleurs avec cette propriété. L'assemblage et la Forme associée sont alors dits de premier niveau. Les assembleurs de second niveau sont ensuite ceux contenus entre deux signes d'un même Délimitant, et tels qu'entre

---

9 Extrait de la *Méthode de l'Universalité* in COUTURAT L, *Opuscules,* op.cit, 97-144. Nous analysons plus complètement ce texte en 12.2.

10 La première étude du treillis des parenthèsages fut l'objet de la thèse de TAMARI, D *Monoïdes préordonnés et chaînes de de Malcev.*Université de Paris. 1951. On en trouvera une présentation sous forme d'exercice dans GRATZER G, *General Lattice Theory.* Birkhäuser. Basel and Stuttgart. 1978. 14-15.Aussi HUGUET D, *La structure du treillis des polyèdres de parenthèsage, Algebra Universalis,* 5 (1975), 82- 87.

11 Les divers territoires respectifs ainsi définis par les deux signes d'un même délimitant doivent être deux à deux, soit disjoints, soit inclus l'un dans l'autre.

eux, il n'existe que des assemblages de premier niveau [12]. Ainsi définit-on assemblages et Formes de second niveau *Et ita porro* ... Ce point de vue cependant, qui part des assemblages de plus faible niveau comme éléments atomiques, est celui du déchiffrage, c'est-à-dire du lecteur. Structurellement synthétique, il construit naturellement la hiérarchie à partir du bas, depuis les assemblages élémentaires. Nous avons cependant déjà souligné dans l'exemple initial, qu'à propos d'une même écriture symbolique, le point de vue de l'auteur (en charge de la représentation) pouvait aussi bien être envisagé : les assemblages les plus importants, les premiers considérés, seront alors ceux des niveaux hiérarchiques les plus élevés. Et on élaborera pareillement une construction théorique du système des assemblages et des Formes, à partir du haut (Cf. *infra* 5.7 : *Déchiffrement analytique, déchiffrement synthétique*).

5.4. Equation " commune " et canon du second degré.

Nous consacrons cette section à l'expression des solutions de ce qu'on appelle aujourd'hui une équation du second degré. Si le terme de "second degré" était anachronique au Moyen-Age -il n'aura pu être employé qu'après Descartes- la substance de la question était ancienne, et sa résolution, déjà effectuée par Euclide, bien connue à la Renaissance; avant le milieu du seizième siècle, elle constituait en fait, sous le nom d' "équation commune", le sommet du calcul. Tous les traités d'algèbre et d'arithmétique antérieurs à 1540 -et parfois largement postérieurs, comme l'*Algebra* de Clavius de 1608- la faisaient figurer comme le modèle achevé de la science des équations. En 1619 encore, dans une lettre célèbre à Beeckmann, le jeune Descartes, au milieu d'un inventaire des cubiques, évoque les équations "communes" [13].

Aux XV^{e} et XVI^{e} siècles, la résolution de cette question, conceptuellement fort importante, était en fait fournie au lecteur par les géomètres, au moyen d'une liste d'instructions, purement rhétorique, permettant de calculer "la" solution à partir des données. Montucla en propose une excellente analyse dans la partie *Equations* de son *Histoire des Mathématiques* [14]. La

12 Ou des Lettres-Chiffres ; il faudra néanmoins qu'au moins un assemblage de premier niveau soit effectivement présent.

13 A.T, X, 155, ligne 14.

14 MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, I, op. cit, 589-590. Montucla publia aussi une *Histoire de la Quadrature du Cercle*, op. cité (réédité en *fac simile* par l'IREM de l'Université Paris VII), qui demeure aujourd'hui encore plein d'intérêt. En dépit de leurs prises de position parfois polémiques, en particulier quant aux querelles de priorité entre Descartes et Harriott, ou Leibniz et Newton, les deux livres demeurèrent longtemps -tout le XIX^{e} siècle en particulier- des ouvrages de référence, écrits en français, sur l'Histoire des mathématiques de l'antiquité jusqu'au

résolution de chaque "Chapitre" [15] d'équation du second degré avait ainsi demandé à Luca di Borgo [16] une suite d'instructions opératoires sous la forme -très rhétorique !- d'un "quatrain d'un latin à demi-barbare" selon Montucla; en voici la première des trois strophes :

1. *Si res et census numero coequantur, a rebus*
Dimidio sumpto, censum producere debes,
Addereque numero, cujus a radice totiens,
Tolle semis rerum, census latusque redibit.

Montucla en propose ce commentaire en termes post-cartésiens [17] :

" Ces espèces de vers rendus dans des termes familiers à nos Analystes, signifient ceci :
1°. si l'on a $x^2 + m\,x = a\,a$, il faut prendre la moitié du coefficient *m* du second terme, ou des *choses*, en faire le quarré et l'ajouter à l'absolu ou *a a* , ensuite ayant tiré la racine de cette somme, en ôter la moitié du coefficient *m*; le restant sera, disaient les Algébristes de ce temps, la valeur cherchée;
2°. si l'on a $x^2 - m\,x = a\,a$..."

Cinquante ans après Fra Luca, Cardan reprit la même rubrique dans le Chapitre V de l'*Ars Magna*, sous le titre de Règle I, dont voici une traduction :

---

milieu du XVIII[e] siècle. A l'historien d'aujourd'hui, les analyses de Montucla apportent la vision d'un homme du XVIII[e] siècle sur les bouleversements mathématiques des deux siècles qui le précédaient.

15 Ainsi les divers cas étaient-ils rangés en rubriques, dont chacun constituait un " chapitre ".

16 Cf. MONTUCLA, *Histoire des Mathématiques*, I, op. cit, 589 : "*Luca di Borgo est le premier dont les préceptes sur l'Algèbre aient subi l'impression... C'est dans sa* Summa de Arithmetica et geometria, *imprimée pour la première fois en 1494 et de nouveau en 1523, qu'il les explique. Ils composent la plus grande partie de ce qu'il appelle l'*Arte maggiore *et c'est de là qu'est venu la dénomination d'*Arte Magna, Ars Magna, *etc. que Cardan et d'autres ont donné à l'Algèbre.(...) L'algèbre de Luca di Borgo ne va pas au -delà des équations du second degré (...) Au lieu que nous ne donnons qu'une règle générale, quelle que soit la forme de l'équation, Luca di Borgo donne pour chacune des trois formes, dont une équation du second degré est susceptible, une espèce de règle particulière ou de canon, qu'il a exprimé par un quatrain d'un latin à demi-barbare.* "

17 idem, 590. Italiques de l'auteur.

"Dans le cas *Querna*, c'est-à-dire *Le Carré égalé à la première puissance et au Nombre*, ajoute le carré de la moitié du coefficient de la première puissance à la constante de cette équation et prend la racine carrée du tout. A ceci, ajoute la moitié du coefficient de la première puissance et cette somme est la valeur de la chose recherchée [18]."

Luca di Borgo et Cardan fournissaient ainsi une description purement rhétorique de la résolution d'une équation, elle-même exposée en termes rhétoriques. Une situation bien usuelle au XVIe siècle. Les équations communes étaient alors l'objet d'une division très figée, en trois rubriques, auxquelles Cardan attribua un surnom abréviatif latin : Carré égalé à la Chose (ou première puissance) et au Nombre (*Querna*), Nombre égalé au Carré et à la Chose (*Nuquer*), Chose égalée au Carré et au Nombre (*Requan*). Ces cas étaient considérés comme essentiellement différents, en une catégorisation toujours vivace au début du XVIIe siècle, par exemple chez le jeune Descartes [19]. La division en trois trouvait sa source dans le fait que les deux coefficients en jeu (de la Chose et du Nombre) étant à l'époque organiquement considérés comme positifs, il fallait ne considérer que des équations satisfaisant à cette obligation, dont il y avait exactement trois types. Ainsi le *Querna* de Cardan traitait-il des cas où le carré de la chose inconnue est égal à une somme (alors dénommée *binôme*) de deux termes : la Chose elle-même, multipliée par un certain coefficient et un Nombre constant; si par exemple le coefficient de la chose vaut 10 et le nombre 144, le lecteur constatera que l'application de la règle I ci-dessus conduit à attribuer la valeur 18 à la chose inconnue (exemple qui suit immédiatement la Règle I dans le texte). On observera *in fine* que la description rhétorique *supra* de la résolution n'est cependant guère simple, s'agissant pourtant d'un chapitre usuel à l'époque, et aussi important. Pour alléger les écritures, Cardan a d'autre part évité de dénommer les résultats partiels de la procédure, ce nous avions nous-mêmes fait plus haut. De là une écriture typique du XVIe siècle, relativement brève, mais peu simple à décrypter, ni à utiliser. En vérité, les écritures rhétoriques mathématiques au XVIe siècle, pourtant rédigées en langue naturelle, loin d'être fines et précisées comme nous les avons artificiellement plus haut énoncées, furent au contraire

18 Cf. WITMER *The Great Art*, op. cit., 36. Les abréviations de Cardan se comprennent ainsi : *Querna* signifie que le carré (Quadratus) est égalé à la Chose (Res) et au Nombre (Numerus). En termes post-cartésiens : $x^2 = ax + b$.

82

19 Lettre à Beeckmann : A.T, X, 155-156.

prodigieusement ambiguës : nous fournirons dans la suite deux exemples de textes ainsi complètement équivoques, chez Cardan en annexe de ce chapitre, et chez Stevin, à la fin du chapitre 8. Une autre solution rhétorique consista alors en l'emploi des quatrains et sonnets, fournissant, comme chez Fra Luca, des règles-comptines pour la résolution, certes plus longues que la Règle de Cardan, mais bien plus faciles à mémoriser.

Un siècle après Cardan, au début de la *Géométrie*, Descartes revint, dans les équations du second degré, exactement sur la même rubrique [20]. L'exemple est doublement important : conceptuellement, il s'agit à nouveau des équations communes, c'est-à-dire d'un sujet d'étude alors primordial. Sur le plan combinatoire, il met en évidence les étapes successives du déchiffrement et de l'interprétation dans le système naissant. En 1637 en effet, Descartes était en possession d'une grande partie de l'écriture symbolique. En termes symboliques, "le Carré égalé à la Chose et au Nombre", est d'abord devenu chez lui l'équation :

$$x \,.\, x = a \,.\, x + b \,.\, b$$

c'est-à-dire, après complétion (non effectuée par Descartes) :

$$(x \,.\, x) = ((a \,.\, x) + (b \,.\, b))$$

Dans les perspectives ambitieuses de la *Géométrie*, c'était là, pour Descartes, seulement un modeste problème préliminaire. Il ne fournit donc à son endroit aucun calcul, mais seulement l'expression suivante qu'il donne pour solution :

$$\frac{1}{2} a + \sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$$

qui ne contient, comme signe d'agrégation, que le seul *vinculum* du radical, en un assemblage qui n'est certes pas dûment complété. Nous verrons que l'élision des Délimitants était usuelle. Nous reconstituerons d'abord la procédure de représentation symbolique de Descartes, en même temps que nous compléterons l'assemblage par ses signes délimitants [21]. La formule est essentiellement un binôme, l'assembleur primordial étant la première des deux Croix, les places étant occupées par les assemblages $\frac{1}{2} a$ d'une part, $\sqrt{\frac{1}{4} a a + b b}$ d'autre part.

---

20 A.T, VI, 375.

21 Pour rendre plus claire l'interprétation, nous avons aussi explicité le Point (interprété comme multiplicatif), absent chez Descartes.

La première complétion conduit donc à :

$$\left(\left(\frac{1}{2} . a \right) + \left(\sqrt{\frac{1}{4} . a.a + b.b} \right) \right)$$

$\frac{1}{2}$. a (la moitié de la Chose chez Cardan) s'analyse en la Forme de niveau deux : $\left(\left(\frac{1}{2}\right) . a\right)$

Cette analyse est évidemment ultime : on ne peut la compléter par d'autres Délimitants.

$\frac{1}{4}$a.a + b. b est d'autre part lui-même à nouveau un binôme , dans lequel (b. b) est une Forme de niveau un (sa valeur était le Nombre chez Cardan), de même que (a.a) et que ($\frac{1}{4}$) .

$\frac{1}{4}$. a . a s'analyse donc ultimement en une Forme de niveau deux :

$$\left(\left(\frac{1}{4}\right) . (a.a)\right)$$

que Cardan désignait comme le Carré de la moitié de la Chose. En sorte que ce dont il fallait prendre la racine dans le binôme initial est représenté par :

$\left(\left(\left(\frac{1}{4} \right) . (a.a) \right) + (b.b) \right)$, Forme de niveau trois .

Ainsi :

$\left(\sqrt{\left(\left(\left(\frac{1}{4} \right) . (a.a) \right) + (b.b) \right)} \right)$ est une Forme de niveau quatre

En conséquence, l'assemblage cartésien dûment complété avec des parenthèses comme Délimitants, devient la Forme :

$$\left(\left(\left(\frac{1}{2}\right) . a\right) + \left(\sqrt{\left(\left(\left(\frac{1}{4} \right) . (a.a) \right) + (b.b) \right)} \right) \right)$$

Ou bien, en utilisant des *vincula* :

$$\overline{\overline{\overline{\frac{1}{2}} . a} + \sqrt{\overline{\overline{\overline{\frac{1}{4}} . \overline{a.a}} + \overline{b.b}}}}$$

Cet exemple pourtant simple découvre donc neuf Délimitants et huit résultats partiels. Telle est la première étape, clairement analytique, de la complétion de la représentation, qui devait être en principe du fait de l'auteur, mais dont Descartes s'était pourtant dispensé. Il fallait cependant que le lecteur puisse interpréter le texte symbolique et, à cet effet, impérativement fixer préalablement un ordre de succession aux assembleurs, donc reconnaître les niveaux, tant des assemblages que des Formes et des couples de parenthèses. Conformément aux règles *supra,* cette ordination se faisait alors sur le mode synthétique: les assembleurs élémentaires, tels que leur territoire ne contînt aucun autre assembleur, étaient combinatoirement très simples à reconnaître : tel était le cas de chaque Barre. Il y avait ainsi quatre assembleurs de premier niveau. Ceux de second niveau étaient alors tels que leur territoire contînt au moins une Forme de niveau un, et pour l'autre place, soit encore une Forme de niveau un, soit une Lettre-Chiffre. Tel était le cas des premier et second Points[22]. On avait ainsi :

$$\left| \; \left| \left| \frac{1}{2} \right| . a \right| + \left(\sqrt{\left(\left(\left(\frac{1}{4} \right) . (a.a) \right) + (b.b) \right)} \right) \right|$$

1 2 5 4 1 2 1 3 1

où nous avons indiqué les niveaux sur la ligne inférieure [23]. Certains auteurs tentèrent ultérieurement d'intégrer dans le système symbolique même la hiérarchie des assemblages, en utilisant un jeu de Délimitants ordonné en trois niveaux : parenthèse, crochets, accolades [24].

Le texte symbolique peut alors être enfin déchiffré, puis interprété, conformément aux règles plus haut : une interprétation rhétorique de cette Forme de niveau cinq consistera à apporter en premier lieu des significations aux quatre assemblages de premier niveau et à constituer les résultats, à examiner ensuite les deux assemblages de second niveau, à constituer leurs résultats, etc... On obtient ainsi pour interprétation rhétorique *exhaustive* :

---

22 Il y a donc deux assembleurs de niveau deux, un de niveau trois, un de niveau quatre, enfin un, terminal, de niveau cinq, celui de la Forme complètée.

23 Cf. ci-dessous le diagramme de parenthèsage associé.

24 Un système qui ne permet pas de décrire plus de trois niveaux et ne pourrait donc s'appliquer à l'équation précédente. Il demeure partiellement valide aujourd'hui, sous la forme suivante : les crochets d'une part, les accolades d'autre part, sont de niveau supérieur aux parenthèses. Cf. sur ce point les conseils en matière de choix de notation, chez ANDRE, op. cit, §508, 202. *Choix des Signes de Coordination*:

" *Lorsque nous aurons à superposer des signes de groupement, nous devrons, en allant du dedans au dehors, les placer toujours dans cet ordre : barre horizontale, parenthèses, crochets, systèmes d'accolades. Ce n'est que dans le cas où il faudrait en superposer un plus grand nombre que nous serions forçés de créer des signes nouveaux.* " (203)

"Diviser l'entier de signe 1 par celui de signe 2, ce qui constitue un premier résultat dont la Forme est $\left(\frac{1}{2}\right)$. Diviser l'entier de signe 1 par celui de signe 4 (deuxième résultat $\left(\frac{1}{4}\right)$). Mettre le nombre de signe a au carré (troisième résultat : (a. a)). Mettre le nombre de signe b au carré (quatrième résultat : (b. b)). Multiplier le premier résultat par le nombre de signe a (cinquième résultat $\left(\left(\frac{1}{2}\right) . \, a \right)$). Multiplier le deuxième résultat par le troisième (sixième résultat : $\left(\frac{1}{4}\right) . (a . a)$). Ajouter le sixième résultat au quatrième (septième résultat : $(\, (\, (\frac{1}{4}) . (a.a) \,) + (b . b) \,) \,)$). Prendre la racine carrée du septième résultat (huitième résultat) :

$$\left(\sqrt{(\, (\, (\frac{1}{4}) . (a.a) \,) + (b . b) \,)} \right)$$

. Ajouter le cinquième résultat au huitième : on obtient ainsi le résultat final de la procédure, c'est-à-dire la valeur de la chose requise."

Dans cet exemple pourtant simple, l'interprétation rhétorique ultime du texte symbolique, s'offre donc au lecteur, à nouveau embarrassée du poids d'une incontestable complexité. Une interprétation qui doit être néanmoins considérée, en un certain sens, comme la seule complètement acceptable : elle prescrit en effet une liste d'instructions, ne comportant ni ambiguïté, ni incertitudes. L'instruction composée résultante pourra ainsi être exécutée, sans réflexion aucune, par un lecteur naïf ou par une machine; ainsi opèrent aujourd'hui les logiciels de calcul formel. Revenons à Descartes et constatons d'autre part, que la publication de cette liste, aurait dans les faits assuré la réalisation de la théorie cartésienne de la connaissance, telle que son auteur l'avait exposée dans les *Regulae* : en bref, partout rechercher l' "ordre" et en supposer même là où il n'en est pas d'apparent [25]. Descartes

25 DESCARTES, *Regulae*, op. cit, 404, 25 à 405, 7, (Règle X) : "tout de même que si nous voulons lire une écriture dissimulée par l'emploi de caractères inconnus, aucun ordre certes n'y apparaît, mais nous en forgerons un pourtant, tant pour faire l'examen de tous les jugements qu'on peut faire par avance [...] qu'aussi pour les disposer en telle sorte, que nous apprenions par leur dénombrement tout ce qu'on peut déduire. Et il faut avant tout se garder, de passer son temps à deviner par hasard et sans aucun art des questions semblables : car même si on peut les trouver sans art, et parfois les plus heureux peut-être plus rapidement que la méthode, elles offusqueraient cependant la lumière de l'esprit..."

Cf. notre analyse dans SERFATI, *Theoria*, op. cit, 71 : "Trouver [sq. pour Descartes], c'est donc trouver l'ordre existant et caché. Et dans un objet déjà constitué. Et ce principe est supérieur à tous les autres. "

A la place du simple terme "ordre" employé par Descartes, nous préfèrerons souvent spécifier ordre *séquentiel*. Comme on verra en effet dans la suite, il est des ordinations naturelles qui ne présentent pas la forme d'une chaîne.

cependant, pas plus qu'il n'avait complété l'assemblage, ne fournira dans la *Géométrie*, le moindre élément de notre interprétation rhétorique achevée: il se limitera à reproduire sans commentaires l'assemblage initial. Une position qui sera celle de tous ses successeurs.

Cet exemple de l'équation commune met en évidence quatre points principaux qui seront ci-dessous plus longuement analysés. D'une part qu'il a d'abord fallu, pour en faire une Forme interprétable, parachever l'assemblage par des Délimitants initialement absents. Ceci, qui aura ici demandé quelque réflexion, s'est fait à partir des superstructures, c'est-à-dire des assemblages de plus haut niveau. La question corrélative de l'élision des signes est étudiée plus loin. Deuxièmement, que la recherche d'une ordination des assembleurs associée à l'adjonction des Délimitants, n'est pas tout à fait simple et n'avait aucunement été proposée par Descartes. En fait, toutes ces considérations de niveau dans les assemblages de l'écriture symbolique, pourtant constitutives de toute lecture non ambiguë de celle-ci, furent tacites et implicites chez les contemporains qui en firent cependant un usage constant et sûr. L'ordination n'est jamais explicitement mise à jour, ni dans les calculs, ni dans les commentaires. En troisième lieu, que notre interprétation en termes rhétoriques, explicite et exhaustive, s'est révélée bien complexe et sera pratiquement toujours ineffectuée. Ainsi en restera-t-on à la seule écriture symbolique, même si la transcription en termes rhétoriques pourra en être considérée comme virtuellement acquise. Quatrièmement enfin, ce que nous avions déjà observé sur l'exemple initial : déchiffrement et interprétation d'un même texte sont exécutés, par l'auteur et par le lecteur, nécessairement en sens inverse. L'auteur est, quant à lui, évidemment guidé par les significations qu'il porte; la codification symbolique qu'il emploie a donc pour tâche de les décrire, c'est-à-dire, espère-t-il, de représenter le plus fidèlement sa pensée. Dans tous les cas, il écrit le texte en commençant par les assembleurs de plus haut niveau, les plus structurants conceptuellement. Dans cette perspective aussi, il a intérêt à ce que l'emploi des règles combinatoires soit pour lui le plus automatique possible. Pour le Descartes auteur de la formule précédente par exemple, il était clair que le signe le plus important, celui qui structure le canon, était la Croix (assembleur de niveau cinq). Après quoi, aux deux places ouvertes ainsi créées, viennent des assemblages de niveau quatre et deux respectivement, qui seront à leur tour décomposés et analysés en assemblages de niveau encore inférieur. La procédure initiale de la représentation, attribuée à l'auteur, est donc analytique. Le lecteur, par contre, rencontre le texte au niveau combinatoire, et il doit d'abord impérativement s'assurer de la possibilité de son déchiffrement, c'est-à-dire de sa non ambiguïté, ce que Leibniz appelle, avec justesse, dissiper l'*aequivocatio* . Il aborde donc l'écriture symbolique au niveau des assembleurs les plus internes, de plus bas niveau; certes les moins signifiants, mais les seuls à être immédiatement reconnus. Le déchiffrement, tout comme l'interprétation, sont donc des constructions progressives et synthétiques.

5.5. Elision des signes.

L'extension de l'écriture symbolique, à partir du milieu du XVI^{e} siècle, aurait dû s'accompagner d'un emploi systématique de signes d'agrégation. Comme on verra en annexe, ce ne fut aucunement le cas de Cardan, dont l'embarras évident à indiquer au lecteur un ordre d'exécution pour des instructions complexes, revêt parfois des aspects comiques. D'un autre côté, les premiers géomètres rigoureux à utiliser la nouvelle écriture, tel Bombelli, se sentirent tenus d'expliciter les ponctuations. Il faut souligner de nouveau ici qu'avant toute éventuelle interprétation, le lecteur d'un texte symbolique devait - et doit encore - rétablir ceux des signes de délimitation qui viendraient à manquer, pour pouvoir tout simplement lire, c'est-à-dire mettre fin à l'ambiguïté. Il faut en même temps reconnaître que cette nécessité ne fut soulignée par aucun des contemporains, qui ne fournirent pas davantage de mode d'emploi pour les Délimitants qu'ils se trouvèrent ainsi, peu à peu, dans l'obligation d'utiliser.

De surcroît, les signes de délimitation eux-mêmes manquèrent souvent, comme dans l'exemple *supra* de l'équation commune chez Descartes :

$$\frac{1}{2}a + \sqrt{\frac{1}{4}a\,a + b\,b}$$

Dans notre étude critique, nous avons, quant à nous, rétabli tous les Délimitants à partir des intentions supposées de Descartes, telles qu'elles résultent d'une comparaison avec le reste de la *Géométrie*, et aussi de notre propre expérience des équations du second degré. Ainsi avons nous été en mesure de compléter dûment
88 cet assemblage. On a peine à imaginer aujourd'hui combien a du être

grande, au début, la difficulté pour ceux des lecteurs du temps, tels le jeune Leibniz, qui découvrirent l'écriture symbolique mathématique par le texte de la *Géométrie*, muet sur ce point. Une convention implicite fonctionnait cependant ici : certains des Délimitants devaient être rétablis à partir de règles, elles aussi implicites, prescrivant combinatoirement des hiérarchies entre les assembleurs. En conséquence, en l'absence de certains signes, le lecteur pouvait néanmoins élaborer mentalement une ordination entre les assembleurs, en observant ces conventions, dont nous donnons ci-dessous quelques exemples. Des règles hiérarchiques d'agrégation qui ne furent jamais explicitées, mais devaient être à leur tour induites par les lecteurs successifs, à partir du contexte d'une part, et d'exemples autrement connus et facilement déchiffrables d'autre part, selon le "principe de la pierre de Rosette." De surcroît variables en fonction des contextes, elles ne revêtirent donc jamais un caractère universel, ni contraignant, ce qui ne facilita évidemment pas les déchiffrages.

En première analyse, ces règles s'énoncent, en comparaison de niveaux, deux à deux, entre assembleurs consécutifs dans la Ligne. Ainsi était-il admis que l'assemblage incomplet de second niveau

$$a + b.\,c$$

devait être déchiffré comme (a + (b. c)) et non comme ((a + b). c), et de façon générale, que le niveau hiérarchique du Point était implicitement inférieur à celui de la Croix. Avec une terminologie en sens inverse, nous dirons aussi que le Point *agrège* ici davantage que la Croix. Ainsi la complétion que nous avons proposée, dans l'exemple cartésien *supra,* de l'assemblage

$$\frac{1}{4}.\,a.\,a + b\,.\,b$$

suivant

$$(\,(\,(\frac{1}{4}).\,(a.\,a\,)\,) + (\,b\,.\,b\,)\,)$$

est-elle conforme à la convention précédente. Encore ceci était-il dépendant du contexte, car un assemblage comme

$$a + b.c.\,d.\,e.\,f$$

pouvait être perçu comme ambigu et réclamant des Délimitants explicites.

Affectée, à l'amont comme à l'aval, d'un faible pouvoir agrégeant, la Barre de fraction, interprétée par la division, 89 chez Descartes par exemple, fut donc considérée comme dotée d'un niveau hiérarchique élevé. En fait, la disposition du dénominateur, en rupture par rapport à la Ligne, ouvrant donc une nouvelle ligne au texte, fut considérée comme affectée, en premier lieu, à la constitution d'une Forme autonome, suivie d'une autre sur la Ligne (au numérateur). Dans chacune des deux Formes constituées, on regarda alors les niveaux hiérarchiques de tous les assembleurs comme inférieurs à ceux de la Barre. Ainsi $a + \frac{c.d}{x+d}$ sera-t-il déchiffré : $\left(a + \left(\frac{(c.d)}{(x+d)} \right) \right)$, un exemple où la Barre est ainsi de niveau deux [26].

Les Deux-points leibniziens, pareillement interprétables par division, ne dérogeaient pas à la Ligne, mais obligeaient par contre à l'adjonction de signes explicites d'agrégation. Ainsi

$a + c : (x + d)$ perçu comme ambigu devait-il être dûment complété, soit en :

$(a + (c : (x + d)))$, soit en :

$(((a + c) : (x + d)))$

Exprimant tous deux la division, la Barre et les Deux-points présentaient donc des propriétés combinatoires distinctes comme Délimitants. Il apparaît ainsi que les règles hiérarchiques, attachées aux signes eux-mêmes et non à leur interprétation, relèvent de la seule syntaxe combinatoire. Quant aux significations des signes d'agrégation on trouvera dans André, op. cité, [27] une liste de ce qu'il appelle des "expressions ambiguës" et de "pléonasmes" [28].

---

26 Il y a ici des différences secondes : le pouvoir agrégeant de la Barre est, à l'aval, plus faible que celui de tout assembleur présent. A l'amont par contre, et comme le montre notre exemple même, il est plus faible que celui de l'assembleur qui le précède immédiatement, mais non pas de ceux qui lui sont encore antérieurs.

27 *Expressions ambiguës*. § 761, 315.

$\sin x\,(y - z)$ dx^2 $\begin{array}{c} \underline{a} \\ \underline{b} \\ c \end{array}$ a^{b^c} $a = b : c + d$

28 Curieusement, André considère que la force des règles hiérarchiques implicites est telle, qu'est superflu leur renforcement par des Délimitants explicites, afin de dûment compléter un assemblage -ce que nous nous sommes chaque fois sentis tenus de faire -. Une complétion qui est pour lui un "pléonasme ".

Ainsi dans : *Pléonasmes*.§ 770, 319 :

"... Chacune des quatre expressions

$\frac{(a - b)}{(c - d)}, \left(\frac{a - b}{c - d}\right), \frac{a - b}{c - d}, (a - b) : (c - d)$

Une place doit être faite en terminant à l'exponentielle, créée au début du XVII^e siècle par Descartes (cf. chapitre 9 : *Puissances. De Viète à Descartes*). L'assembleur est ici indiqué par son absence (le "Blanc" exponentiel), et l'assemblage, combinatoirement repéré par une place nouvelle, au-dessus de la Ligne. Descartes tout en se dispensant de l'emploi de Délimitants, nulle part n'explicite la syntaxe de l'assemblage exponentiel. Celle-ci est cependant complexe, le pouvoir agrégeant du Blanc étant différent à l'amont et à l'aval. Il ressort en effet immédiatement du texte de la *Géométrie* que :

$a + b^{2}$ doit être déchiffré
$(a + (b^{2}))$ et non $((a + b)^{2})$. De même :

$c.\, b^{2}$ doit être déchiffré comme $(c.\, (b^{2}))$ et non comme $((c.\, b)^{2})$. Relativement à l'amont (l'exponentié), le Blanc, qui agrège davantage que la Croix et le Point, est donc doté d'un fort pouvoir agrégeant. Relativement à l'aval (l'exposant) au contraire, ouvert sur la ligne haute, la règle est la même que pour la Barre : les signes occupant cette place haute constituent primordialement une Forme, ultérieurement soumise à ses propres hiérarchies internes. Autrement dit, le pouvoir agrégeant du Blanc est, relativement à l'aval, plus faible que celui de tout autre assembleur dans ce territoire. Ainsi :

$b^{2 + c}$ doit-il être déchiffré $(b^{(2 + c)})$,

et non

$((b^{2}) + c)$. Un exemple mixte, amont et aval, montre alors que

$a + b^{2 + c}$ doit être déchiffré :

$(a + (b^{(2 + c)}))$

où le Blanc est de niveau deux. Ces réflexions sont prolongées en 11.5 (*Exposants et Délimitants*).

Il ne peut être question dans la présente étude de rechercher ni d'expliciter toutes les règles hiérarchiques implicites qui furent utilisées. Nous ne poursuivrons donc pas une

représente le quotient de a-b par c-d. On eût pu ajouter qu'elle le représente sans ambiguïté. Mais, dans les deux premières, les parenthèses sont inutiles, la barre horizontale du rapport remplissant fort bien, outre son rôle habituel, celui de signe de groupement. Toutefois ces parenthèses n'ont d'autre inconvénient que de charger l'écriture ; l'emploi qu'on en fait n'est point fautif ; il ne constitue qu'un *pléonasme.* "

liste d'exemples, qui pourrait certes être encore élargie. A l'évidence cependant, se pose la question des motifs de l'élision. L'examen synoptique d'un assemblage dûment complété par nous, tel :

$$\overline{\overline{\frac{1}{2}a}} + \sqrt{\overline{\overline{\frac{1}{4}\overline{a\,a}} + \overline{b\,b}}}$$

fournit un premier élément de réponse. A l'examiner en effet, on aurait pu croire que la brièveté des écritures, c'est-à-dire l'un des avantages tiré du remplacement de l'écriture rhétorique par la symbolique, avait été à nouveau perdue dans la complexité de signes d'agrégation enchevêtrés. Dans l'économie générale du système symbolique naissant, on comprend alors tout l'intérêt de conventions hiérarchiques qui dispensèrent l'écriture symbolique d'une partie des Délimitants. Sans expliciter la chose, mais sans hésiter, Descartes, le premier, en fit un emploi extensif dans sa *Géométrie*, qui est, à ce titre aussi, le premier texte de l'Histoire des mathématiques aujourd'hui lisible. Pour les lecteurs mathématiciens naïfs du début du XVII^{e} siècle, l'apprentissage fut difficile, à la mesure du caractère implicite des règles. Difficulté qui demeure sans doute aujourd'hui encore, pour les apprentis en mathématiques. Pour les géomètres expérimentés du XVII^{e} siècle cependant, le rétablissement des signes d'agrégation se fit peu à peu de plus en plus brièvement, bientôt sans qu'il soit nécessaire d'écrire tous les signes manquants - contrairement à ce que nous avons fait plus haut - enfin inconsciemment, à partir d'un examen synoptique de chaque ligne de calcul, en vertu des règles sous-jacentes. En d'autres termes, aujourd'hui comme hier, les assemblages ne furent jamais dans les faits dûment complétés et les complétions que nous avons proposées, comme sur l'équation commune de Descartes, demeurèrent virtuelles. La complétion était certes nécessaire, avant toute considération de sens, à seule fin de pouvoir seulement donner au texte une forme lisible, mais elle ne fut pas effectuée. La complétion était aussi possible : on se dispensa cependant de la faire, sans même expliciter le fait. A l'analyse structurelle contemporaine, les plus simples exemples de la *Géométrie* révèlent cependant un nombre surprenant de niveaux imbriqués. Dans l'activité de déchiffrage du texte symbolique cependant, le non-rétablissement d'un sytème complet de Délimitants, joint à l'absence d'explicitation des règles d'ordonnancement, aboutit à la formation d'un
92 apprentissage inconscient spécifique et à une mise en oeuvre réflexe

rapide des conventions tacites. La pratique du calcul, si fort revendiquée par Leibniz ressortit donc nécessairement pour une part à cette forme d'apprentissage, par le rétablissement premier, sous une forme non consciente, des signes de délimitation qui structurent le texte; en prescrivant en effet, sous la forme de préséances et d'indifférences, un ordre séquentiel à toute liste d'instructions constitutive d'un texte symbolique mathématique, c'est bien ce rétablissement des signes absents qui lève définitivement l'ambiguïté de l'ordre.

5.6. Leibniz et les signes de *comprehensio*.

Leibniz se montra toujours soucieux de préciser sur des exemples l'emploi de ses Délimitants (qu'il appelle signes de *comprehensio*), ainsi que l'équivalence entre divers systèmes qu'il lui arriva d'employer. Le texte d'une lettre à Jean Bernoulli du 15 Mai 1696 [29], donné en annexe, montre bien ses préocuppations symboliques, et d'abord un attachement profond à ne conserver qu'une seule Ligne au texte, même dans des expressions complexes, interprétées comme superposition de quotients, telle :

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}}$$

qui, dit-il, "demande cinq lignes typographiques au moins". De façon donc, à "ne pas interrompre la typographie, ni perdre de l'espace", Leibniz commence par substituer systématiquement, au lieu de la Barre, les Deux-points de son invention, qu'il interprète pareillement comme division. Si cependant, à la Barre, avaient été depuis longtemps associées des règles hiérarchiques, précises et fortes, dispensant de Délimitants, il n'en était pas de même pour les Deux-points nouveaux, eux qui réclamaient impérativement des signes d'agrégation. Leibniz, analysant d'abord finement la hiérarchie des assemblages en jeu, tentera d'en distinguer les niveaux au moyen des virgules de deux types, directes et inverses, suivant :

scribi: ,a + ,b : c, : ,e — ,f : g,, :

La virgule inverse ici introduite est une Figure extra-ordinaire, proprement leibnizienne, et qui ne lui survivra pas. En un temps second, Leibniz lui-même jugera cet emploi trop

29 M.S, II, 275-277. Le texte complet est donné en annexe.

complexe et décidera de les omettre, ne conservant que les seules virgules directes, pour ainsi obtenir :

a +, b : c,, : e -, f : g,,

In fine, il se ralliera à l'emploi moderne des seules parenthèses rondes sans indication de niveau, suivant :

(a + (b : c)) : (e - (f : g))

où, dit-il, la "parenthèse inverse ne se confond plus avec la lettre c". Dans ce même souci de conserver une seule Ligne, quitte à multiplier les Délimitants, on admirera la précision du *Monitum De Characteribus Algebraicis* [30]. Ainsi, dit Leibniz, pour

$$\frac{\sqrt{aa+b\sqrt{cc+dd}}}{e+\sqrt{f\sqrt{gg+hh}+kk}}$$, on peut écrire :

$$\sqrt{}(aa+b\sqrt{}(cc+dd)):,e+\sqrt{}(f\sqrt{}((gg+hh)+kk)$$

De même, écrit-il à Hermann, [31] :

> La multiplication n'a pas besoin de s'exprimer seulement par des croix, mais on peut écrire
> a + b, l + m ou même
> (a + b) (l + m) , ce qui est
> pour moi la même chose que :
> $\overline{a+b} \times \overline{l+m}$
> J'ai l'habitude d'utiliser des virgules ou des parenthèses à la place des *vincula*.

5.7 Déchiffrement analytique, déchiffrement synthétique.

L'inventaire des assembleurs d'une même Forme composée a fait apparaître deux sens à l'ordination, contraires et également légitimes, pour l'ordre de leur succession : soit ordination décroissante, en termes de niveaux, depuis les assemblages les plus

---

30 M.S, V II, 221.

31 Du 21 Juillet 1707, M.S, IV, 319.

élevés, jusqu'aux élémentaires, soit, en direction inverse, croissante, à partir des assemblages élémentaires, hiérarchiquement les plus faibles. A l'ordination décroissante, nous avons associé la procédure à visée analytique, de décomposition ou de déconstruction : c'est la position de l'auteur.

Tout aussi clairement, à l'ordination croissante est attachée une démarche synthétique de reconstruction : dans ce sens, il faut au géomètre examiner d'abord, où qu'ils puissent se trouver (et ils ne sont pas en général consécutifs) tous les assembleurs élémentaires du texte, les seuls qui soient combinatoirement immédiatement reconnaissables. A partir d'eux, il reconnaît alors les assembleurs de second niveau, etc... jusqu'à l'unique assemblage de niveau supérieur à tous les autres. Une démarche corrélative du déchiffrement du texte symbolique : c'est la position du lecteur.

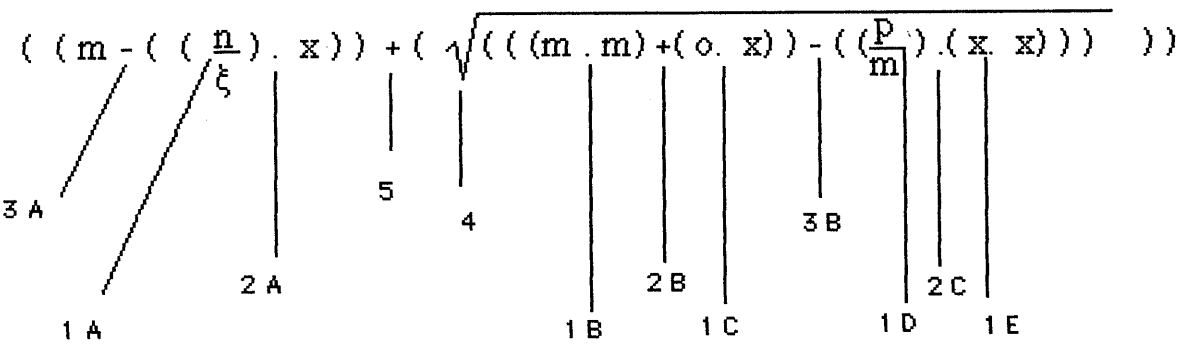
Cette distinction théorique entre deux positions, conceptuellement essentielle à notre exposé méthodologique, ne recouvrit pas complètement, en réalité, les actions des protagonistes effectifs. Nous allons voir qu'il se trouvait en effet, quant à l'achèvement de chacune des deux démarches, analytique ou synthétique, des difficultés propres et incontournables. Pour les décrire, nous utiliserons quelques termes et concepts de la théorie des graphes. Le résultat essentiel est celui-ci : la structure combinatoire de tout assemblage dûment complété peut complètement se décrire par un diagramme, usuellement dit de parenthésage, ici appelé, en hommage à Leibniz, *arborescence combinatoire*, et qui est un certain graphe orienté [32]. Nous prenons pour l'illustrer l'assemblage ainsi écrit par Descartes dans la *Géométrie* :

$$m - \frac{n}{\xi}.\ x + \sqrt{m.\ m + o.\ x - \frac{p}{m}.x.\ x}$$

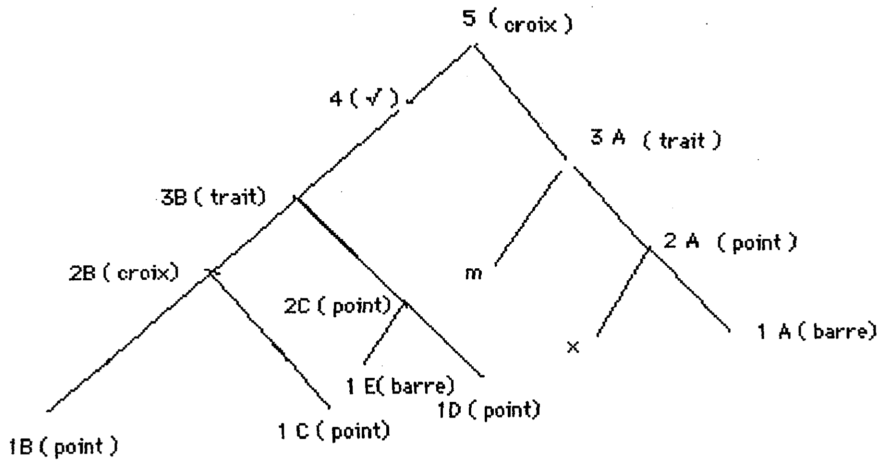
En termes modernes, il s'interprète comme l'équation d'une conique, que Descartes a trouvée comme solution du

32 *Arborescences, arbres* et *forêts* ont donné lieu à une abondante production mathématique contemporaine, parmi laquelle on peut citer, en anglais : ORE O., *Theory of Graphs*, A.M.S. Colloquium Publications. Providence. 1962 et en français, BERGE C. Graphes et Hypergraphes. Dunod. Paris. 1970. Il est diverses façons équivalentes de définir une arborescence, ce dont rend compte l'équivalence entre les sept propriétés du Theorème 13 du traité de Berge, page 30-31 (Ed. 1970). La plus simple est d'appeler *arborescence* tout graphe orienté, quasi-fortement connexe et sans cycles. Il existe alors un sommet a (la racine) qui est relié à tout autre sommet par un chemin unique (issu de a), ceci caractérisant les arborescences. De façon équivalente, si l'on supprime un arc quelconque, le graphe n'est plus quasi-fortement connexe (cf. BERGE, op. cit, 31).

Problème de Pappus à quatre lignes [33]. Conformément à ses habitudes, Descartes a utilisé très peu de Délimitants. En les rétablissant complètement -une opération qui demande quelque attention- l'assemblage devient cette Forme de niveau cinq :



où les niveaux sont indiqués sur des lignes inférieures, et où on a aussi différencié les assembleurs distincts, mais de même niveau; il y a ainsi quatre assembleurs de premier niveau, dénommés 1A, 1B, 1C et 1D. L'arborescence combinatoire est alors :



Le diagramme possède donc nécessairement une racine et une seule (le sommet 5), propre à la représentation de l'assembleur suprême (la Croix centrale), puis des branches et des feuilles, ces dernières correspondant aux assembleurs de plus faibles degrés, de niveau un le plus souvent (tel 1A). Certaines feuilles sont cependant dépourvues d'indication de niveau : elles correspondent à des Lettres-Chiffres, tels m et x ; il sera commode de les considérer à leur tour, comme des assemblages, de niveau *zéro.*

---

33 A.T, VI, 399. Sur l'analyse du contenu mathématique et historique, voir BOS H., The Structure of Descartes's *Geometrie*, op. cit.

Les deux démarches, analytique et synthétique, correspondent alors à deux façons naturelles d'explorer complètement l'arborescence. La procédure analytique de l'auteur, commence par la racine 5, puis choisit arbitrairement de décrire la feuille droite par exemple, commençant par 3 A, puis m, puis remonte à 3 A, descend à 2 A, etc... Arrivé en 1 A, il lui faut remonter à 5 pour décrire la branche gauche commençant par 4, etc... Clairement, la difficulté est ici pour le géomètre de devoir se souvenir à chaque instant des choix déjà faits, ou encore de reconnaître tout ce qu'il a précédemment exploré : seule cette connaissance en effet lui permettra de choisir le point de l'arborescence auquel remonter. Certes, il lui serait toujours possible de se prescrire des règles de choix prétendûment universelles et impératives, comme de toujours explorer "à gauche" en premier. Cependant, outre le caractère véritablement artificiel de ces conventions, on notera aussi que leur emploi, impossible de façon directe sur le texte symbolique même, aurait nécessité la représentation préalable de l'arborescence complète, une opération bien évidemment anachronique au XVII^e^ siècle : rappelons qu'à cette époque, tout comme aujourd'hui, même la simple complétion préliminaire des assemblages n'aura été aucunement effectuée. Il reste que, dans tous les cas, la procédure décroissante ne pourra être purement analytique, au sens usuel de ce terme : pour "descendre" de la racine aux feuilles, il faut en effet chaque fois remonter à des niveaux supérieurs intermédiaires.

D'un autre côté, la procédure synthétique du déchiffreur, consiste à examiner en premier lieu toutes les feuilles (ici au nombre de cinq), associées aux assembleurs combinatoirement immédiats, puis à explorer à partir d'elles tous les assemblages de niveau deux (ils sont ici trois), etc... La difficulté est alors d'une autre nature : les feuilles ne sont pas représentées par des points voisins sur l'arborescence. Le géomètre doit donc garder simultanément en mémoire les portions de chemins effectuées sur quatre ou cinq branches, distinctes, et sans cesse mettre à jour l'état de sa progression. Ainsi, la procédure croissante n'est pas davantage purement synthétique, dans la mesure où elle ne peut être décrite par un chemin direct, partant des feuilles et "visant" la racine.

Bien entendu, les géomètres du temps ne tracèrent pas ce que nous avons appelé l'arborescence combinatoire d'une Forme. Pas plus que ne le font les mathématiciens contemporains désirant écrire ou déchiffrer un texte symbolique ! En fait, même la nécessité des Délimitants ne fut aucunement explicitée au XVII^e^ siècle et la complétion bien rarement exécutée; encore moins trouva-t-on la définition, toute moderne, d'une hiérarchie 97 entre les assembleurs. Il y avait cependant à l'époque, comme on vient de le voir, des difficultés intrinsèques à la représentation symbolique que les géomètres ne pouvaient contourner. Le fond de la question, l'objectif affiché, était en effet l'interprétation ultime, c'est-à-dire l'énoncé d'une liste d'instructions, sous forme séquentiellement ordonnée, une *chaîne* au sens mathématique moderne du mot. Mais en vérité, il n'est pas dans la nature des choses mathématiques que ces instructions soient ainsi séquentiellement ordonnées; elles forment au contraire une arborescence, où l'ordre est, également au sens moderne, seulement *partiel*, c'est-à-dire fait de préséances et d'indifférences [34]. De façon un peu anachronique, nous avons alors tendance à conclure retrospectivement aujourd'hui que toutes les tentatives, analytiques ou synthétiques, visant à ramener la description d'une arborescence à celle d'une chaîne, ne pouvaient qu'être vouées à un certain échec. L'entreprise d'interprétation de l'équation commune, que nous avons complètement détaillée *supra*, et que nous avons dite exhaustive, a consisté dans les faits à vouloir ultimement transformer une arborescence en une chaîne. Une mise à plat, sans doute conceptuellement nécessaire comme on a vu, mais qui ne pourra jamais être qu'artificielle comme on l'a aussi constaté : chaîne et

---

34 Une relation d'ordre sur un ensemble de signe E (ou, plus simplement, un *ordre* sur lui) est une relation binaire réflexive, symétrique et transitive. Le couple (E, ≤) constitué d'un ensemble et d'un ordre sur lui est appelé un ensemble ordonné, en anglais *poset* (partially ordered set). L'ordre est dit total (ce que nous appelons ici séquentiel), si deux éléments quelconques de l'ensemble sont *comparables* pour ≤, c'est-à-dire si, pour tout couple de signe (a, b) $\in E^2$, on a a ≤ b, ou b ≤ a. On dit aussi alors que (E, ≤) est linéairement ordonné ou encore est une *chaîne*, par exemple (IN, ≤) ou (IR, ≤). Un ordre non total est dit *partiel* : il existe alors des couples de signe (a, b) tels que l'on n'ait, ni a ≤ b, ni b ≤ a : les deux éléments de signes a et b sont alors dits *incomparables*. Un exemple simple et naturel d'ordre partiel est la relation d'inclusion sur l'ensemble P (Ω) des parties d'un ensemble Ω, contenant plus d'un élément. Si a ≤ b et s'il n'existe aucun élément de signe c tel que c ∉ { a, b } tel que a ≤ c ≤ b, on dira que l'élément de signe a est un prédécesseur de celui de signe b (ou bien b un successeur de a). Dans le diagramme d'un ensemble ordonné fini, dit de Hasse, on représentera alors seulement les relations de prédécesseurs à successeurs, par un arc fléché de l'élément de signe a vers celui de signe b. Ainsi, deux éléments quelconques de signes x et y seront tels que x ≤ y si et seulement si il existe une suite d'arcs fléchés allant de l'élément de signe x à celui de signe y. Pour une initiation à la théorie des ensembles partiellement ordonnés, on pourra consulter BIRKHOFF G,*Lattice Theory*, op. cit. Plus spécifiquement pour les ensembles finis : TROTTER W, *Combinatorics and Partially Orderd Sets, Dimension Theory*, The Johns Hopkins University Press. Baltimore. 1992. Aussi, en français, SERFATI M, *Algèbres de Boole, avec une introduction à la théorie algébrique des graphes orientés et aux " sous-ensembles flous "*. Sedes. Paris. 1973.

L'ordre partiel ici constitué sur l'ensemble des assembleurs est appelé *ordre d'intervalle* : à chaque assembleur du texte est associé un couple de parenthèses, délimitant lui-même un intervalle dans la Ligne, bijectivement associé à l'assembleur. On dira alors qu'un premier assembleur est inférieur (ou égal) à un second, si l'intervalle associé au premier est inclus dans le second. L'ordre constitué est effectivement partiel, ce que nous avons appelé préséances et indifférences correspondant respectivement à la comparabilité ou l'incomparabilité entre assembleurs. Le diagramme de Hasse de cette relation d'ordre sur les assembleurs est une arborescence.

arborescence présentent en effet, comme ensembles ordonnés, des structures internes inconciliables, non isomorphes. La mise à plat n'aura été possible qu'au prix d'une perte de substance et d'une complexité accrue [35], même en se donnant la faculté de numéroter les résultats partiels, ce qui simplifie les choses. Ainsi découvre-t-on ici une autre cause de l'abandon de fait de l'interprétation rhétorique ultime. Dans ces conditions, ces écritures symboliques ininterprétées se trouvèrent virtuellement enfermer une quantité considérable d'informations, retenue en quelques signes seulement. Déchiffrée exhaustivement et précisément, une page d'écriture symbolique du XVII^e^ siècle -*a fortiori* contemporaine- contient ainsi une impressionnante liste d'instructions, d'objets et d'opérations enchevêtrées. Une faculté dans laquelle les mathématiciens reconnurent ultérieurement ce qu'ils appelèrent volontiers la "puissance" de l'écriture symbolique, que décrivait ainsi Charles Babbage :

> " The quantity of meaning compressed into small space by algebraic signs, is another circumstance that facilitates the reasonings we are accustomed to carry on by their aid.The assumption of lines and figures to represent quantity and magnitude, was the method employed by the ancient geometers to present to the eye some picture by which the course of their reasonings might be traced : it was however necessary to fill up this outline by a tedious description, which in some instances even of no peculiar difficulty became nearly unintelligible, simply from its extreme length : the invention of algebra almost entirely removed this inconvenience [36]."

Notre analyse combinatoire du texte symbolique souligne aussi rétrospectivement à la fois l'intérêt et l'échec de la conception de la connaissance chez Descartes, ancrée dans la question de l'ordre. Pour le Descartes des *Regulae*, le terme recouvre seulement ce que nous avons appelé ici ordre séquentiel. Dans cette perspective, analyse et synthèse se caractérisent simplement pour lui comme les deux mouvements naturels, en sens inverse, associés à un tel ordre séquentiel, qui permettent ainsi l'exploration d'une chaîne. Et cette métaphore sous-jacente de la

35 En termes mathématiques, elle est impossible : chaîne et arbre ne sont pas isomorphes comme ensembles ordonnés.

36 BABBAGE C : *On the influence of Signs in Mathematical Reasoning*. Transactions of Cambridge Philosophical Society.Vol II (1827), 330.

chaîne est en effet omni-présente, dans les *Regulae* comme dans la *Géométrie* , des moyennes proportionnelles aux Compas Cartésiens [37]. Dans l'écriture symbolique mathématique cependant, le remplacement de la chaîne par l'arborescence, de l'ordre séquentiel par l'ordre partiel, modifiera en profondeur le support métaphorique sur lequel analyse et synthèse cartésiennes étaient construites. Pour ce qui est donc de la connaissance mathématique, telle qu'on la trouva inscrite dans son écriture symbolique, en un exemple essentiel et structurant pour Descartes lui-même, nous serons donc à la fois en accord et en désaccord avec lui : certes, analyse et synthèse sont toutes deux nécessaires au développement de la connaissance, certes l'analyse est première dans la recherche, tout comme la synthèse dans l'exposé des résultats, mais ce schéma se doit en vérité appliquer, non pas à un ordre séquentiel sous-jacent, représenté par une chaîne reliant le donné et le requis, mais à une arborescence combinatoire et à un ordre partiel.

Revenons enfin ici sur le choix, par l'auteur et le lecteur, de la procédure, analytique ou synthétique. L'auteur du texte symbolique ne pouvait initialement que se placer en position analytique, et commencer par descendre depuis l'assembleur de plus haut niveau. Cependant, il lui fallait ensuite parfois remonter jusqu'à la plus proche des branches non explorées, en une démarche qui n'était donc plus analytique, et demandait d'autre part le secours d'une forme mécanique de la mémoire. De son côté, le lecteur naïf du texte se plaça rarement en position synthétique pure. Dès lors que le texte comportait en effet cinq ou six niveaux, la reconnaissance des seuls assembleurs élémentaires ne prescrivait aucun ordre simple à lire sur le texte symbolique, et par lequel continuer la construction pour arriver à la racine. C'est qu'il fallait également, selon les métaphores cartésiennes, ne pas "perdre de vue" cette racine. Poursuivre une méthode purement synthétique aurait dans les faits entraîné de bien grandes difficultés dès lors que le nombre de niveaux séparant les feuilles d'avec la racine devenait important. C'aurait été, comme dit Leibniz, la "mer à boire" [38]. Ainsi donc, le lecteur était-il aussi tenu de procéder localement de façon analytique, en sorte que le déchiffrement effectif du texte symbolique, loin de se réduire au procédé purement synthétique que

---

37 Cf. notre analyse dans SERFATI, *Compas*, op. cit, 214.

38 " et souvent, ce serait la mer à boire que de vouloir faire toutes les combinaisons requises, quoiqu'on puisse souvent s'y aider par la méthode des exclusions, qui retranche une bonne partie des combinaisons inutiles, et souvent la Nature n'admet point d'autre Méthode. Mais on n'a pas toujours les moyens de bien suivre celle-ci. C'est donc à l'Analyse de nous donner un fil dans ce labyrinthe, lorsque cela se peut, car il est des cas où la nature même de la question exige qu'on aille tâtonner partout, les abrégés n'étant pas toujours possibles." (*Nouveaux Essais*,, IV, II, 2-7).

nous avons conventionnellement décrit, se constitua dans les faits d'un mélange d'analyse et de synthèse, la synthèse venant après-coup consolider localement les avancées de l'analyse. C'est ce même mélange entre analyse et synthèse, dans des extensions respectives inconnues et variables, dépendant du lecteur et du texte, que Lebesgue décrivait si pertinemment, en commentant Viète et Descartes [39], et qui continue d'être aujourd'hui encore la clé du déchiffrement. L'absence de procédure synthétique claire rendit cependant plus problématique encore toute interprétation finale du texte en termes rhétoriques, pourtant l'objectif virtuel de la représentation: la procédure synthétique défaillante était en effet la source de l'affectation des niveaux aux divers assembleurs, donc de l'ordre séquentiel des interprétations.

5.8. Autonomisation du texte symbolique.

L'analyse des procédures que nous venons de proposer n'est pas seulement rétrospectivement indispensable à la compréhension intime des mécanismes théoriques; en vérité, chacune de ses étapes devait être, explicitement ou non, effectivement mise en oeuvre par les géomètres. Nous retournons à la comparaison entre Descartes et Cardan, évoquée au début de ce chapitre. A l'époque de Cardan, seul un texte rhétorique était proposé au lecteur géomètre, tel la description *supra* de la résolution de l'équation commune. Une fois le texte convenablement rédigé et donc syntaxiquement correct, il était en même temps sémantiquement complet; aucun supplément n'était en principe nécessaire à un texte rhétorique achevé. D'une part en effet il n'y avait, chez Cardan comme chez Euclide, aucune considération dans le texte, implicite ou cachée, qui demandât, au moins théoriquement, un rétablissement explicite. D'autre part, même si un commentaire se trouvait ajouté pour rendre le texte plus clair, il ne pouvait évidemment être que rhétorique, comme le texte lui-même : en l'absence d'un double registre, rhétorique et symbolique, la question même d'un possible métalangage ne pouvait se poser.

[39] "Les conceptions de Viète n'ont guère été remarquées, encore que le "mouvement continu " de pensées dont parle Descartes dans ses *Regulae,* qui permet d'embrasser l'ensemble d'une question soit fort voisin de la zéthèse." (Lebesgue cite ensuite la Règle XI des *Regulae).* LEBESGUE H : *Commentaires sur l'oeuvre mathématique de F.Viète. Arithmétique. Analyse. Algèbre.* in Notices d'Histoire des Mathématiques. L'Enseignement Mathématique. Genève. 1958, page 11.

L'écriture symbolique, chez Descartes par exemple, s'organisa au contraire autour d'une pratique opératoire bien différente : un aller-retour entre les registres rhétorique et symbolique. Il était ainsi cinq étapes successives : visée initiale rhétoriquement exprimée, essai de représentation symbolique, représentation dûment complétée (positions de l'auteur), puis déchiffrement, interprétation enfin du texte symbolique décodé (positions du lecteur) qui devaient être impérativement exécutées par Descartes. Il ne les explicita cependant pas; certes il commença bien quelquefois par exprimer rhétoriquement sa visée authentique. Mais il ne proposa jamais au lecteur qu'un texte symbolique syntaxiquement incomplet et aussi non interprété. Sur le plan combinatoire en premier lieu, ni la nécessité des Délimitants, ni leur adjonction, ne fut l'objet de la moindre explicitation. Or, leur rétablissement, pourtant absolument nécessaire à la lecture même du texte, pouvait demander un travail considérable. Si le très simple "canon du second degré" comporta ainsi huit niveaux, la structure de la formule de Cardan dans le livre III de la *Géométrie* en requérait bien davantage. Nous l'avions à dessein reproduite ci-dessus, au chapitre 1, en guise d'introduction. Ceci conduisit, comme on a vu, à un apprentissage inconscient spécifique du déchiffrage du texte symbolique.

Sur le plan signifiant, Descartes, comme tous les géomètres après lui, n'explicita pas davantage la phase finale de l'interprétation du texte symbolique : ainsi les significations ne furent pas restituées en langage rhétorique : jamais Descartes n'interpréta exhaustivement les équations qu'il obtint, c'est-à-dire en fournit une signification rhétoriquement exprimée, analogue à celle que nous avons proposée pour l'équation commune. On en a détaillé la raison. L'interprétation exhaustive, en principe but ultime du travail, aurait été en effet constituée d'un texte rhétorique achevé, exact au demeurant, mais au moins aussi complexe que celui de Cardan sur le même sujet. Le fait cependant que l'interprétation demeurât théoriquement possible fut -au moins au début du XVII^{e} siècle- le garant ontologique de l'écriture symbolique, savoir la traduction du symbolique en termes communicables à tous, au moyen d'une suite d'instructions séquentiellement ordonnée. Demeura donc une virtualité d'interpréter ultimement le symbolique, qui ne fut aucunement utilisée.

Avec le temps, le seul objet qui subsista dans les faits fut donc le texte symbolique, toujours implicitement assorti de la possibilité d'une interprétation rhétorique exhaustive, dont la réalisation effective se faisait néanmoins chaque jour plus lointaine.

Il arriva donc naturellement que le texte symbolique gagna en autonomie, c'est-à-dire que le combinatoire occupa parfois tout le terrain, aux dépens des significations. A la fin du XVII^e siècle, Leibniz fut alors le premier des géomètres, d'une part à explorer cette voie purement combinatoire, d'autre part à théoriser sa démarche. Dès lors en effet qu'il ne fut plus considéré comme nécessaire de revenir chaque fois à son interprétation rhétorique, l'écriture symbolique, désormais seule à occuper le devant de la scène, se trouva être l'objet de possibles manipulations sur sa substance combinatoire propre : remplacement d'un signe par un autre, ou par un ensemble de signes formant assemblage, échange ou permutations de signes, et ce, comme on verra au chapitre 13 (*L'art combinatoire. Substitutions et métamorphoses.*), primitivement, en dehors de toute considération de signification. Des manipulations combinatoires, purement symboliques, complètement inconcevables pour Descartes, mais qui furent autant d'essais de découverte chez Leibniz, en quelque sorte dégagé de la nécessité quotidienne de rendre ontologiquement compte de son action dans le registre rhétorique, ce dernier continuant d'être considéré comme le seul garant de la réalité des choses. Des substitutions symboliques qui furent l'objet d'un examen attentif de la part de Leibniz, constitutives aussi de son *Ars Inveniendi* en mathématiques. Dès lors, la séparation d'avec le texte mathématique euclidien se trouvait définitivement accomplie. Des questions qui sont au centre de nos préocuppations, dans les chapitres qui suivent.

5.9. Arborescence combinatoire.

Nous résumons ici nos conclusions de ce chapitre, observant que l'écriture symbolique mathématique se constitua donc, aux XVI^e et XVII^e siècles, pour une première part sur le terrain de propriétés spécifiques de ponctuation, délimitation et agrégation, très souvent implicites. L'emploi dans le texte symbolique de Délimitants, comme les parenthèses, ouvrit en effet, peu à peu, aux géomètres du XVII^e siècle la possibilité d'exécution successive d'un nombre important d'instructions variées, une opération en réalité complexe, et qui, de ce fait, n'avait pu être rhétoriquement envisagée auparavant. Ce fut une grande avancée méthodologique. Apparemment issue d'une simple modification quantitative visant le nombre d'instructions à décrire, elle trouva en fait une extension telle, qu'elle en devint une différence de nature. Le résultat en fut en premier lieu une structuration particulière du texte symbolique, telle qu'on la trouve par exemple dans la *Géométrie*. Dans les faits cependant, les géomètres produisirent un texte symbolique incomplet, et paradoxalement sur le point même 103 qui aurait du servir à le constituer : le plus souvent, il y manquait nombre de Délimitants. Ceux-ci, qui pourtant devaient être impérativement considérés, à seule fin que le texte symbolique ne fut pas ambigu, furent alors implicitement et mentalement rétablis, soit en partant du contexte et de l'expérience du moment des géomètres, soit de certaines règles hiérarchiques entre les opérations, elles aussi implicites. Les assembleurs du texte furent ainsi considérés comme agrégeant, avec des niveaux implicites d'agrégation. Nous verrons au chapitre 6 comment il fut aussi également implicite, dès sa création, que le signe pour l'égalité séparait plus fortement que tous les autres signes, et qu'il fut, au début, comme chez Descartes, le seul avec cette fonction.

Ainsi dûment complété par des signes délimitants, le texte symbolique, qui se présentait, hier autant qu'aujourd'hui, comme un enchevêtrement de formes symboliques mathématiques, pouvait désormais être déchiffré sans ambiguïté. Deux sens possibles étaient cependant envisageables : soit le déchiffrement analytique, partant des structures et des instructions extérieures, les plus signifiantes, pour descendre vers les Formes ultimes. Soit le déchiffrement synthétique, partant au contraire des instructions intérieures, combinatoirement les plus simples à repérer, pour remonter vers les plus signifiantes. Deux sens qui co-existèrent effectivement dans le déchiffrement de tout texte un peu complexe. Dans les faits, la scansion d'un texte de calcul se fit à la fois par agrégation et séparation. Dès lors, l'interprétation rhétorique complète du texte symbolique fut virtuellement possible, les Délimitants étant interprétés comme signes d'agrégation, les Formes comme résultats d'instructions, et l'enchevêtrement de deux Formes comme exécution successive des instructions qu'elles représentaient, en commençant par la Forme de plus bas niveau. Ceci se constitua en une structure qui nous apparaît rétrospectivement aujourd'hui représenter la nature même des choses mathématiques en logistique: une suite d'instructions ne se présentant pas comme séquentiellement ordonnée, mais formant une arborescence combinatoire où sont seulement indiquées certaines préséances ou indifférences, entre les opérations. Dans ces conditions, Descartes et ses successeurs se dispensèrent de la phase ultime, c'est-à-dire l'interprétation rhétorique explicite du texte symbolique dûment complété. Une interprétation qui fut considérée en un premier temps comme étant à la fois trop complexe à mettre en oeuvre, en même temps que virtuellement possible. Une interprétation virtuelle qui allait aussi demeurer longtemps le garant ontologique du texte
104 symbolique : ce dernier était censé pouvoir être traduit en langue

naturelle. Peu à peu cependant, le registre symbolique gagna en autonomie et en importance; parfois, il finit par demeurer en quelque sorte seul, et donc possiblement l'objet de manipulations portant sur sa seule structure combinatoire. A l'écriture euclidienne des mathématiques, purement rhétorique, aura donc d'abord succédé un double registre, rhétorique et symbolique; avec le temps l'importance du second allait encore croître, jusqu'à occuper parfois le devant de la scène.

ANNEXES AU CHAPITRE 5

Annexe 1 . *Ars Magna* , de Cardan.

operationis. Probatio eſt, vt in exemplo, cubus & quadrata 3. æquentur 21. æſtimatio ex his regulis eſt, ℞. v. cubica 9 1/2 p̄. ℞. 89 1/4 p̄. ℞. v. cubica 9 1/2 m̄. ℞. 89 1/4 m̄. 1. cubus igitur eſt hic conſtans ex ſeptem partibus,

12. m̄. ℞. cubica, 4846 1/2 p̄. ℞. 23487833 1/4
m̄. ℞. v. cubica 4846 1/2 m̄. ℞. 23487833 1/4
p̄. ℞. v. cub. 46041 3/4 p̄. ℞. 2119776950 7/8 m̄. ℞. 2096286117 9/16
p̄. ℞. v. cub. 46041 3/4 p̄. ℞. 2096354180 13/16
p̄. ℞. v. cub. 46041 3/4 p̄. ℞. 2096354180 13/16 m̄. ℞. 2096289117 9/16 m̄. ℞. 2119776950 7/8
p̄. ℞. v. cub. 226 1/2 p̄. ℞. 65063 1/4 p̄. ℞. v. cub. 256 1/2 m̄. ℞. 65063 1/4

Tria autem quadrata ſunt ex ſeptem partibus hoc modo,

9. p̄. ℞. v. cub. 4846 1/2, p̄. ℞. 23487833 1/4,
p̄. ℞. v. cub. 4846 1/2 m̄. ℞. 23487833 1/4
m̄. ℞. v. cub. 256 1/2 p̄. ℞. 65063 1/4
m̄. ℞. v. 256 1/2 m̄. ℞. 65063 1/4
m̄. ℞. v. cub. 256 1/2 p̄. ℞. 65063 1/4
m̄. ℞. v. cub. 256 1/2 m̄. ℞. 65063 1/4

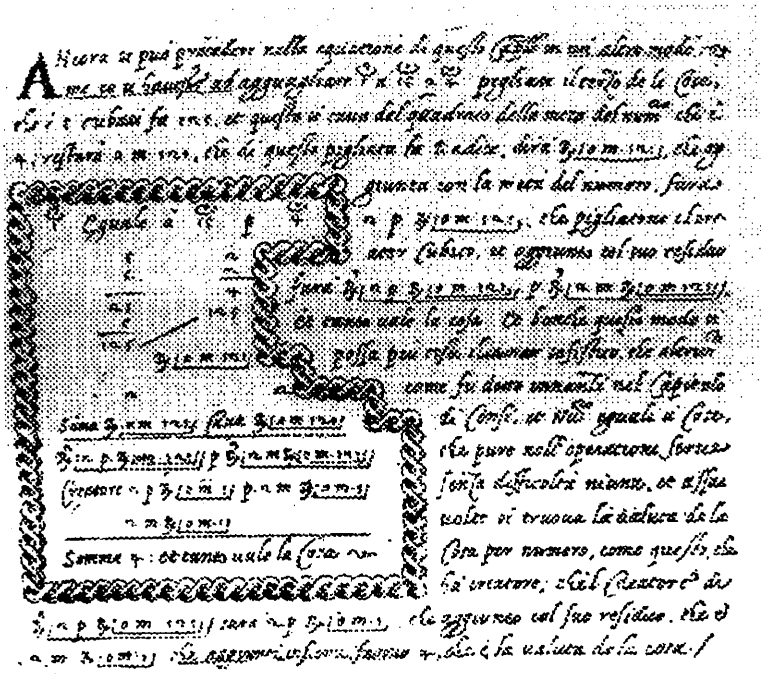
Inde iunctis tribus quadratis cum cubo ſex partes, quæ ſunt ℞. v. cubicæ æquales p̄. cum m̄. cadunt & relinquitur 21. ad amuſſim aggregatum.

Partie de la page 255 de l'*Ars Magna* , de Jérôme Cardan, dans la réédition du tome IV de ses Oeuvres. Lyon. 1663. Le premier paragraphe s'interpréte ainsi en termes post-cartésiens : la preuve est comme dans l'exemple : $x^3 + 3.x^2 = 21$. Selon ces régles, le résultat est :

$$\sqrt[3]{9\frac{1}{2}+\sqrt{89\frac{1}{4}}}+\sqrt[3]{9\frac{1}{2}-\sqrt{89\frac{1}{4}}}-1$$

La suite de la page est consacrée au détail de l'élévation au cube du nombre précédent (!). Le texte, qui n'est aucunement délimité, est ainsi équivoque, Cardan ne parvenant pas à indiquer avec précision la succession des opérations d'extraction de radicaux.

Annexe 2. *Algebra* de Bombelli .



Fac simile du manuscrit de l' *Algebra*. Bombelli, un homme rigoureux, était très soucieux de Délimitants. On notera ainsi la présence répétée d'un *vinculum* soulignant. Extrait de BORTOLLOTTI E, *L'ALGEBRA, Opera di RAFAEL BOMBELLI DA BOLOGNA*, op.cit, 11.

Annexe 3 . *Géométrie* , de Descartes .

&, remettant en ordre ces termes par le moyen de la multiplication, il vient

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix}-2cd\\+bb\\+dd\end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix}+4bcd\\-2ddv\end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix}-2bbcd\\+ccdd\\-ddaa\\+ddvv\end{matrix}\right\} yy - 2bcddy + bbccdd \infty 0;$$

Et ainsi des autres.

Descartes représenta souvent l'agrégation au moyen d' un déploiement graphique orthogonal à la Ligne, in *Géométrie*, A.T, VI, 415 .

Annexe 4 . Leibniz à Jean Bernoulli.

possit, cum pars sit ex nostris descripta, pars ex iis non intellectis enata.

In notandis calculis ad usum typorum decrevi pro lineis vinculorum imposterum uti commatibus directis atque inversis in vim parenthesium: ita non interrumpetur typorum series nec spatium amittetur, et tamen omnia (ni fallor) accurate habebuntur. Velim tamen prius Tuam audire sententiam. Exempli causa, Tuum

$$\frac{a+\frac{b}{c}}{e-\frac{f}{g}},$$

quod quinque typorum lineas minimum postulat, sic poterit scribi: ‚a + ‚b : c‘ : ‚e — ‚f : g‘‘: possent tamen inversa commata omitti, scribique a + ‚b : c‘‘ : e — ‚f : g‘‘, quod et facere soleo et communiter sufficere potest. Sed tamen designatio quasi parenthetica per commata includentia est absolutior tutiorque interdum; praesertim si pro commatibus adhibeantur verae parentheses, ne commata inversa confundantur cum littera c, exempli gratia in eodem casu ista stabit (a + (b : c)) : (e — (f : g)).

Pergratum fuit, quod nuntias de notatis Domini Hugenii marginalibus in Acta Eruditorum. Rogo ut omnia describi cures, sive me sive alios concernant, mihique communices, libenter expensas reddam. Initio parum favebat methodis nostris, quod fructum earum, sua amicorumve experientia, nondum didicisset, quod nec

Pour ne garder qu' une seule Ligne au texte, Leibniz élimine les Barres(de fraction), les remplace par ses Deux- points, avant d'expérimenter des jeux de Délimitants divers : virgules inverses et directes, enfin parenthèse rondes. Lettre de Leibniz à Jean Bernoulli du 15 Mai 1696. M.S, II , 276.

Première partie :
Le système.

Chapitre 6

Adéquation

et

propositionnelles.

6.1. Adéquation et complétudes.

Nos premiers exemples d'équation, simples entre tous, seront encore extraits de la *Géométrie* [1] (livre I) :

> "C'est-à-dire : *z* que je prends pour la quantité inconnuë est égale à *b*, ou le quarré de de *z* est égal au carré de *b* , moins *a* , multiplié par *z* ; ou le cube de *z* est égal à *a* multiplié par le quarré de *z* , plus le quarré de *b* muliplié par *z* , moins le cube de *c* ; & ainsi des autres."

L'objectif de Descartes a clairement été le suivant : *z* étant le signe d'une quantité inconnue et recherchée, mettre en regard deux quantités inconnues, d'une part cette inconnue elle-même, d'autre part le résultat d'instructions composées la contenant, Descartes donnant ici trois exemples. Il aurait pu légèrement compliquer ce schéma initial en utilisant les mêmes matériaux, mettant par exemple en adéquation d'une part le carré de *b* , moins *a* , multiplié par *z* , d'autre part le cube de *z* , plus *a* multiplié par le quarré de *z*, plus le quarré de *b* muliplié par *z* , moins le cube de *c* . Le schéma serait demeuré celui d'une mise en relation par égalité de deux quantités inconnues, résultats d'instructions composées.

Dans tous les cas, Descartes fut conduit à ce qu'il appela une équation (à une inconnue), à laquelle il appliqua ultérieurement des méthodes spécifiques de résolution. La constitution d'une équation à une inconnue était considérée par Descartes comme un paradigme de la théorie de la connaissance, qu'il analysa longuement, à la fois dans les *Regulae* et dans la *Géométrie* [2]. Ainsi, dit-il :

> "Puis sans considérer aucune différence entre ces lignes connues ou inconnues, on doit parcourir la difficulté selon l'ordre qui montre, le plus naturellement de tous, en quelle sorte elles dépendent les unes des autres

---

1 A.T., VI, 373.

2 D'abord dans les trois dernières règles IX, XX, XXI des *Regulae* (468, 20 - 469, 9) qui ne comportent que leur seul énoncé. Elles sont reprises presque mot pour mot dans la *Géométrie*, in A.T., VI, 372, 22 à 373, 2 et 373, 2 à 374, 5.

jusqu'à ce qu'on ait trouvé un moyen d'exprimer une même quantité en deux façons : ce qui se nomme une Equation, car les termes de l'une de ces façons sont égaux à ceux de l'autre [3]."

Ainsi, pour Descartes, la constitution de l'équation est-elle directement associée, dans le calcul, à ce moment privilégié de la mise en regard, où se rejoignent l'analyse régressive et la synthèse progrédiente, ces essentielles catégories cartésiennes.

En vérité, bien avant Descartes, dans des exemples logistiques divers, tant numéreux que spécieux, s'était depuis longtemps posée cette question de l'égalité. Dire que trois et deux font cinq, que la racine carrée de 144 vaut 12, que l'on "pose" une nouvelle inconnue égale à deux fois l'ancienne, ou encore que le cube de la Chose est égal à 24, à quoi s'ajoute la Chose même, sont quatre exemples différents, où opère cependant un concept commun d'égalité, ici exprimé en français par les verbes "font", "vaut", "est égal à". Ainsi l'égalité met-elle en relation deux quantités qui peuvent être complexes, c'est-à-dire résultats d'instructions composées. Au-delà des spécificités contingentes (équations ou identités) de ces exemples, une caractéristique commune de cette perspective égalitaire était simplement que, partout dans un contexte donné, les deux quantités en jeu dans l'égalité pourraient être substituées l'une à l'autre. Il s'est donc agi, en un premier temps, de l'égalité numérique au sens strict, puis de ses avatars : adéquation, égale valeur par recherche de l'inconnue, coïncidence géométrique, égalité possible par coïncidence, par superposition ou déplacement, bref des figures de la "mêmeté". Cette conception de l'égalité comme identité, *i.e* comme le résultat d'une idéale interchangeabilité, est celle qui prévalut longtemps, incarnée dans la définition leibnizienne célèbre : "*Eadem* sunt quae sibi ubique substitui possunt salva veritate. *Diversa* quae non possunt [4]." Cette position fut d'ailleurs celle adoptée par Leibniz lui-même dans ses écrits logiques (non pas mathématiques). Si les géomètres du XVII^e^ siècle distinguèrent bien néanmoins, entre égalité et identité, ce ne fut, à notre sens, qu'après la critique par Frege au début de son article *Sens et dénotation* (op.cit), que vint s'organiser une conceptualisation véritablement adéquate. La conception du *salva veritate* demeura néanmoins -et demeure encore aujourd'hui-

3 A.T., VI, 372.

4 In *Essais de calcul logique*, in *Opuscules*, op.cit, 264.

vivace, par exemple dans la reconnaissance des substitutions admissibles. Pour nombre d'auteurs en effet, les seules substitutions envisageables doivent nécessairement s'opérer *salva veritate*, ce que revendique clairement par exemple Jevons [5]. Une position qui ne nous paraît aucunement justifiée au regard des pratiques de l'invention mathématique. Au chapitre 13 (*L'Art combinatoire. Substitutions et métamophoses*), nous donnons au contraire un panorama d'exemples de substitutions opérées de façon purement combinatoire, complètement en dehors de tout cadre signifiant, qu'il soit ou non *salva veritate*.

Une instruction opératoire, même fort composée, telle que décrite au chapitre précédent, n'aura quoiqu'il en soit aucunement été, mathématiquement parlant, un but ultime. Ajouter deux à trois par exemple, ou bien retrancher la grandeur de signe a à celle de signe b, ne seront certainement que les étapes intermédiaires d'un calcul achevé, que ce soit la démonstration d'une propriété universelle, ou la recherche d'une grandeur inconnue. Revenons à l'instruction cartésienne : "soit z le signe d'une grandeur inconnue; effectuer le carré de b , moins a , multiplié par z et constituer son résultat", et constatons aussitôt son caractère inachevé, mathématiquement parlant. Observons par contre qu'il est mathématiquement pleinement signifiant d'utiliser son résultat en l'insérant dans une mise en relation par égalité. Pour ce faire, on envisagera, par exemple cette seconde instruction élémentaire : "retrancher 2 de z et constituer son résultat". Tout comme Descartes, nous considérerons alors :

"égaler les résultats des deux instructions précédentes"

comme un énoncé mathématiquement accompli. Contrairement donc à celui d'une instruction isolée, élémentaire ou composée, une telle assertion est, en mathématiques, sémantiquement complète : c'est la substance même de l'argumentation de Descartes, traitant dans les *Regulae*, de l'élaboration d'une équation. Un achèvement qui s'entend au sens de

5 Cf. sur ce point LARGEAULT : " En 1869, Jevons reconnaissait la raison profonde de l'identité dans la possibilité de substituer les termes figurant de part et d'autre du signe d'égalité: "Les symboles A= B dénotent l'identité des objets représentés par les termes indéfinis ou les noms A et B" (W.S JEVONS, *The substitutions of similars and the principle of reasoning*, §20, page 24).

Jevons regardait la substitution des termes identiques (appelée par lui substitution des semblables), comme le type de tout raisonnement." LARGEAULT J, *Logique et philosophie chez Frege*. Nauwelaerts. Louvain - Paris. 1970, 120.

constitution d'une unité mathématique autonome : on ne prétendra pas qu'on ne pourra ultérieurement la manipuler comme une pièce d'un ensemble d'énoncés plus vaste. Ceci, qui sera au contraire usuel, fera toutefois quitter le terrain mathématique, et entrer dans le registre logique : en effet, l'unité sémantique dernière en mathématique (un jugement d'égalité entre résultats d'instructions composées) est en même temps la première des pièces de l'édifice logique.

De ces exemples modestes on infère que les procédures se limitant à des instructions opératoires, élémentaires ou composées, ne peuvent à elles seules être considérées comme achevées, contrairement à celles contenant une (et une seule) instruction d'adéquation ("égaler les résultats...") [6]. On dit usuellement que l'énoncé terminal ("égaler...") est celui d'une *proposition* mathématique (élémentaire [7]). Si donc une proposition mathématique est une proposition de la langue commune, la réciproque est évidemment invalide.

Exprimer une mise à égalité entre résultats avait constitué une procédure constante, partout repérable depuis la mathématique grecque. A cet effet on trouva, à longueur de pages dans le texte rhétorique : *font*, *égalent*, *valent*, *aequales*, *aeaquari*, *esgale*, *faciunt*, *ghelicjk*, *gleicht*, *fara*, etc... Nous prenons un exemple chez Tartaglia, un de ces géomètres du XVI^e^ siècle le plus attaché à l'ancienne écriture rhétorique et le plus rebelle à l'introduction de l'écriture symbolique [8] :

---

6 Nous excluons ici les "égalités continues ", comme

$$a = b = c = d,$$

combinatoirement incorrectes. Cf. sur ce point ANDRE, op. cit.*Egalités continues*. § 907, 381.

"J'appelle égalité ou équation continue une suite d'éléments (nombre quantités ou expressions quelconques) dont chacun est séparé du suivant par un signe =. Telles sont les suites

$$a = b = c = d = e,$$
$$p = q = r = 0."$$

7 Nous omettrons souvent le qualificatif dans la suite.

8 Le début de la solution du *Quesito* XIII du livre IX des *Quesiti* (op.cit), de Niccoló Tartaglia. Dans cet exemple, historiquement important, Tartaglia veut, en termes post-cartésiens, résoudre deux équations cubiques $x^3 + 3.x^2 = 5$, d'une part ; $x^3 + 6x^2 + 8x = 1000$ d'autre part. Commençant par déclarer que Fra Luca (Luca Pacioli) en avait jugé la résolution impossible, Tartaglia lui-même ne fournit pas de résultat, mais affirme qu'il a trouvé la règle générale pour $x^3 + px^2 = q$.

MAESTRO ZVANNE. Trouatime un numero, qual multiplicato per la sua Radice piu 3, mi faccia 5. Simelmente trouatime 3 numeri, ma chel secondo sia 2 piu del primo, & chel terzo sia pur 2 piu del secondo, & che multiplicato el primo fia el secondo, et quel produtto fia el terzo faccia 1000. N. M. Zuane, uoi me haueti mãdato questi uostri dui quesiti, come cose impossibile da risoluere, ouer ignorate da uoi, pche procedẽdo p Algebra, el primo cõdusse l'operãte, in 1 cubo piu 3 cẽsi egual à 5 et il secõdo in 1 cubo piu 6 cẽsi piu 8 cose equal à 1000 li quali capitoli p fin à q̃sto tẽpo é stato giudicato da F. Luca, & altri esser impossibile à risoluerli p regola generale, credẽdoui con tai quesiti di farui cauallero sopra di me, & da farui

Dans une écriture ainsi presque entièrement rhétorique, ignorant tout Délimitant, toute Figure d'égalité et où ne figurent que des Chiffres, on aura pu ainsi observer, parsemés, des *fara* , *faccia* , *equal* , presque à chaque ligne. Et en regard de l'histoire des autres concepts et signes en jeu, la persistance de l'écriture rhétorique sur le point de l'égalité fut notable.

6.2. Représentations symboliques. De Recorde à Descartes.

L'idée d'une représentation symbolique de l'égalité était en effet assez neuve au XVI[e] siècle [9], et ce n'est qu'en 1557 qu'apparut, dans The *Whetstone of Witte,* sous la plume de Robert Recorde, un signe neuf et spécifique : deux traits parallèles à la ligne d'écriture. L'exemple introductif de Recorde est cette équation numérique :

14.ꝫ.—+—.15.ϱ.========71.ϱ.

soit :

14 choses + 15 carrés ========= 71 carrés

Le signe de Recorde (les Deux-traits) était ce que nous avons appelé une figure symbolique mathématique, c'est-à-dire puisée en dehors du magasin général des signes alors préexistants. Pour Recorde, par ailleurs utilisateur du système cossique, l'emploi d'une Figure répondait seulement aux commodités abréviatives habituelles : il en justifia en effet le choix en alléguant que "rien n'est

---

9 Si l'on excepte les tentatives sans lendememain de Luca Pacioli (CAJORI, I, 111) et Regiomontanus (idem, 95), au moyen d'un trait horizontal étendu, aussi celle de Cardan, par un simple "blanc" prolongé dans l'écriture (idem, 117), en une représentation particulièrement ambiguë. Cf. une analyse détaillée dans *Signs of Equality,* in CAJORI, I, 297- 309, 400.

plus semblable que deux traits parallèles à la ligne d'écriture." Dans le texte de 1557, le signe était plus long que celui aujourd'hui usuel, de même que la croix et le trait.

Les Deux-traits n'apparurent pas sous forme imprimée avant 1618, et ne furent, en fait, connus du public que tardivement, après 1631. Parurent cependant, simultanément cette même année, trois ouvrages qui l'utilisèrent largement : l'*Artis Analyticae Praxis* , un traité fort répandu de Thomas Harriot [10], la *Clavis Mathematicae* de Oughtred, enfin la *Trigonometria* de Richard Norwood [11]. Le signe connut alors une extension tardive et large. L'*Artis Analyticae Praxis,* est ainsi, avant Descartes, le premier ouvrage mathématique important qui offre continûment des exemples d'équations, tant numériques qu'indéterminées, utilisant les Deux-traits de Recorde. Telle cette équation du troisième degré :

$$52 ========= -3\,a + a\,a\,a$$ [12]

complètement résolue par Harriott, suivant :

$$52 == -3.a + aaa \quad \ldots \quad a == 4.$$

$$a == \underbrace{\underbrace{\sqrt{3.)\,26 + \sqrt{.675}}}_{2.+\sqrt{3.}} + \underbrace{\sqrt{3.)\,26 - \sqrt{675.}}}_{2-\sqrt{3.}}}_{4.}$$

Le signe était ainsi largement utilisé en Angleterre à l'époque de Descartes, qui en a certainement eu connaissance, mais proposa néanmoins une autre Figure, le : $\propto$, elle aussi neuve. L'aspect historique de cette question est developpé plus loin. Ainsi, les exemples introductifs *supra* sont-ils écrits dans la *Géométrie* [13]

10 Cet ouvrage posthume de Harriott parut à Londres en 1631.

11 Voir l'analyse de CAJORI, I, 298.

12 *Artis analyticae praxis,* 101. Extrait de CAJORI, I, 201. Utilisant la règle de Cardan, Harriott trouve d'abord $\sqrt[3]{26+\sqrt{275}} + \sqrt[3]{26-\sqrt{275}}$. Puis il montre que cette expression est égale à 4. On donne en annexe un *fac simile* de la page 101 complète.

13 *Géométrie,* Livre I, A.T, VI, 376. Le contexte de cette suite d'équations est donné en annexe.

$$z \propto b,$$
ou $z^2 \propto -az+bb,$
ou $z^3 \propto +az^2+bbz-c^3,$
ou $z^4 \propto az^3-c^3z+d^4,$
&c.*

et encore, pour notre dernier exemple non cartésien :

$$b^2 - a\,z \propto z^3 + a\,z^2 + b\,b\,z - c^3$$

6.3. Déchiffrage et interprétation.

L'exemple de Harriott montre comment devait naturellement s'opérer le déchiffrage : la Figure ====== était impérativement reconnue en premier. Elle créait alors, dans la Ligne, deux places ouvertes exactement, distinctes et fixes, l'amont et l'aval, ici respectivement occupées par un Chiffre (52), et par un assemblage composé qui, dûment complété par des Délimitants, donnait la Forme :

(- (3 . (a))) + (a . (a. (a)))

L'ensemble était alors déchiffré :

(52 ========== (- (3 . (a))) + (a . (a . (a))))

En première analyse, la fonction combinatoire des Deux-traits pourrait donc sembler analogue à celle des assembleurs : créer deux places où viennent des Formes, de divers niveaux. Les Deux-traits détenaient cependant un pouvoir agrégeant incomparablement plus faible, *stricto sensu*, que celui de tous les assembleurs. Autrement dit, en sens inverse, leur pouvoir séparateur, était, d'une façon absolue, plus élevé que celui de tous les autres signes opératoires. De la sorte, dès que les Deux-traits étaient présents, aucun signe ne pouvait être considéré dans le texte, ni ajouté, qui soit doté d'un niveau hiérarchique supérieur. Ainsi, ce niveau, qui ne pouvait plus être repéré par un entier comme pour les assembleurs, les transcendait-il tous. Et les Deux-traits, dès qu'ils étaient présents, étaient alors seuls avec cette propriété : le caractère syntaxiquement complet de l'assemblage en résultait mécaniquement. Sur le plan combinatoire donc, et contrairement aux assembleurs, un seul Deux-traits suffisait à organiser une unité syntaxique autonome, que nous appellerons une forme propositionnelle élémentaire, ou plus simplement une propositionnelle (élémentaire) [14]. Dans cette fonction combinatoire d'achèvement, nous dirons que les Deux-traits sont un (signe) constitutif.

Dans ces conditions donc, toute propositionnelle élémentaire s'interprétait comme proposition élémentaire. C'est ainsi qu'un texte mathématique usuel, ancien ou moderne, est en fait déchiffré à partir de chaque signe d'égalité (ou de ses tenant-lieu), des séparations qu'il instaure, des deux blocs ainsi constitués, et des hiérarchies à l'intérieur de chaque bloc, elles-mêmes reconnues à partir des assembleurs de plus bas niveau. L'invention d'un "signe d'égalité" a donc été un élément décisif de la constitution d'une écriture mathématique autonome, séparée de la langue naturelle.

6.4. Signes constitutifs.

Dès le XVIe siècle, la place centrale jouée par le concept d'adéquation fut pareillement occupée par d'autres, structurellement analogues. On notera celui de la *distinction* (cinq plus trois est différent de quatre plus un), de la *supériorité* (ou infériorité) numérique (deux plus trois est plus grand que 7/4). Toutes conceptions qui furent autant de mises en relation suivant des modalités diverses : au début du XVIIe siècle, on dénombrait l'égalité, l'identité, la différence, la supériorité et l'infériorité. Leibniz y ajoutera d'abord la similitude, puis la congruence. L'exemple constitutif de l'adéquation fut donc peu à peu subsumé sous le concept général de mise en relation, qui devint, dans le registre signifiant, le concept majeur structurant toute proposition mathématique. Du côté combinatoire, les géomètres opérèrent les représentations au moyen de figures symboliques nouvelles, tels les Coins, inaugurés par Harriott en 1631 et interprétés en termes d'inégalité [15] :

---

14 Le terme "propositionnelle" étant très connoté sur le plan signifiant, nous aurions sans doute préféré ici "Forme accomplie" ou, plus simplement, une "Accomplie", qui ne préjugent pas des significations et indiquent seulement l'achèvement combinatoire. Nous avons néanmoins décidé de nous conformer à une terminologie usuelle dans la logique contemporaine. Cf. par exemple BLANCHE R.*Introduction à la logique contemporaine*. Armand Colin. Paris.1968. page 129. D'autre part, nous omettrons souvent le qualificatif "élémentaire" dans la suite.

15 *Artis analyticae praxis*, op. cit. page 10. In CAJORI, I, 199.

" Majoritatis $>$ ut a $>$ b significat a majorem quam b

Minoritatis $<$ ut a $<$ b significat a minorem quam b ."

ou des Figures leibniziennes variées, telle : $\cong$

A la fin du XVII^e siècle donc, la présence dans le texte d'un (et d'un seul) des signes :

$$= \; > \; \not\equiv \; < \; \cong \qquad \neq \qquad \leq \; \geq \; \approx \; \gg \; \equiv$$

construits sur le modèle fonctionnel des Deux-traits, et pareillement reconnus comme constitutifs, signalait donc l'organisation d'une forme propositionnelle élémentaire. On trouvera ci-dessous une liste de divers constitutifs, typiquement leibniziens, interprétés comme avatars de l'identité : la similitude, ou la congruence par exemple [16] :

$$\propto \quad \text{(congruence)} \; \sim \; \simeq \; \backsimeq \; |\simeq| \; \approx$$

$$\backsim \quad \text{(similitude)} \; \backsimeq \quad \propto \; \infty$$

Par la suite, au XIX^e siècle en particulier, d'autres modes de mise en relation viendront encore s'ajouter à ceux-ci, dans le cadre des théories axiomatiques naissantes, d'une façon qui aurait paru inconcevable au XVII^e siècle, même pour Leibniz. Ultimement, le concept de mise en relation lui-même sera objectivé, par axiomatisation, dans le cadre de la théorie des *relations binaires*, initialement par Augustus de Morgan [17].

6.5. L'impossible maintien de la phrase rhétorique.

Dans la phrase mathématique rhétorique, le groupe verbal associé au concept d'égalité occupait évidemment la place centrale. Dans l'écriture symbolique naissante, sa représentation par une Figure donna donc à celle-ci le rôle

---

[16] Figure extraite d'un Tableau donné en annexe, provenant d'un inventaire commenté de tous les signes de Leibniz, avec leurs dates d'apparition in CAJORI F, *Leibniz, the Master-Building of Mathematical Notations*, in ISIS, **23**, Vol VII, 3. Mars 1925, 412-429.

[17] *Syllabus of a proposed System of Logic*. Londres. 1860. On en trouvera une excellente présentation moderne in FRAÏSSE, R, *Theory of Relations*, North Holland. Amsterdam. New-York. Oxford. 1986.

combinatoire central. En même temps, elle rendit en fait impossible le maintien de la structure rhétorique dans le reste de la phrase. Tant que l'égalité avait été en effet indiquée rhétoriquement, chacun des deux termes qu'elle réunissait avait pu être représenté, soit en termes purement rhétoriques, soit en écriture syncopée. Chez Euclide, l'égalité avait été à l'évidence exprimée de façon purement rhétorique, comme dans :

> "Si une ligne droite est coupée en raison extrême et moyenne, le carré du plus grand segment ajouté à la moitié du tout est égal à cinq fois le carré de la moitié." [18]

Chez Cardan comme chez Stiefel, l'égalité continua d'être rhétoriquement écrite, au milieu d'un texte partiellement symbolique. Nous reprenons ici l'exemple de la recherche de nombres en proportion continue, étudiée au chapitre 3 [19]. Au milieu d'un texte purement cossique, l'égalité est indiquée quatre fois en deux lignes, deux fois par *faciunt*, deux fois par *aequata*.

> "Itaque 2 𝔵., multiplicatae in summam extremorum, id est, in 1 A + 1 𝔵., faciunt 2 𝔵. A + 2 𝔷, aequata. 4335. Deinde 2 𝔵. multiplicatae in 2 A seu ins ummam omnium faciunt 4 𝔵. A aequata 6069."

Avec la suppression du verbe "égalitaire", disparurent d'abord ses formes et ses temps de conjuguaison, et avec eux les déclinaisons grammaticales qu'en latin ou en allemand, il commandait. Comment dans ce cas décliner les fragments rhétoriques restant ? D'autre part, le signe constitutif nouveau créait, dans la Ligne, deux places fixes et distinctes, situation qui ne pouvait toujours coïncider avec la syntaxe de la rhétorique. Comment maintenir celle-ci dans une phrase commandée par une figure symbolique centrale ? On reconnaît ici les mêmes points de discordance entre rhétorique et symbolique que nous avions observés à propos de la représentation d'une succession d'instructions. Dans les faits, la représentation symbolique de la mise en relation et le remplacement corrélatif du verbe central par une

---

18 HEATH, *Elements*, III, 440, op. cit, Livre XIII. Proposition 1.

19 CAJORI, I, 140.

Figure acheva de rendre impossible tout maintien, même partiel, de la structure rhétorique dans chacun des termes restant. Ceci est clair dès la toute première apparition, en 1557, du signe de Recorde : le texte du *Whetstone of Witte* a définitivement perdu toute allure rhétorique. En vérité, la phrase rhétorique mathématique, dérivée de la syntaxe grecque puis médiévale, avait été, des siècles durant, structurellement prédicative. Et cette structure prédicative dissymétrique, de l'affectation d'un attribut à un sujet, allait de soi dans l'expression rhétorique de l'adéquation. Dans "deux et trois font cinq" par exemple, le "font" indiquait l'affectation d'un attribut (cinq) à un sujet, lui-même le résultat d'une instruction élémentaire (ajouter deux à trois et constituer le résultat). Une telle interprétation dissymétrique était pareillement valide à propos de "six divisés par deux est égal à trois". De fait, les premiers emplois effectifs des figures symboliques, chez Harriott, comme chez Descartes, continuèrent de véhiculer une certaine dissymétrie : ainsi, dans le texte de la *Géométrie*, les deux places, amont et aval du signe cartésien sont-elles le plus souvent distinctement occupées : à l'une des deux places (aval, le plus souvent) viennent des Formes hierarchisées complexes, l'autre étant dans tous les cas simplement occupée, soit par une Forme élémentaire, soit par le Chiffre Zéro, comme dans l'exemple :

$$z^2 \propto - a z + b b$$

où le "second membre" (- a z + b b) continue ainsi d'apparaître en quelque sorte comme un attribut du premier. Au contraire, un exemple [20] comme :

$$s s - v v + 2 v y - y y \propto r y - \frac{r}{q} y y$$

ne se trouve-t-il que rarement dans la *Géometrie* [21]. La première des écritures symboliques pour l'égalité garda ainsi quelque temps trace de l'ancienne structure, rhétorique et dissymétrique. Après Leibniz prévalut par contre notre conception moderne des constitutifs où les deux places créées peuvent être occupées de la même façon par des Formes quelconques.

---

20 A.T, VI, 415.

21 Une situation qui se modifiera cependant avec le temps. Ainsi, douze ans après la publication de la *Géométrie*, dans une lettre à Carcavi du 17 Août 1649 (A.T, V, 393), Descartes écrit-il :

$$a + b + 2\sqrt{a b} \propto c + d + 2\sqrt{c d}$$

6.6. Des niveaux dans le texte.

Un point terminal mérite d'être souligné, en revenant sur le statut de la mise en relation. Celle-ci a été en première analyse comprise comme une instruction supplémentaire, de statut transcendant : égaler les résultats de deux instructions composées. Une analyse plus fine établit cependant qu'au XVII^{e} siècle, chez Descartes par exemple, il ne s'est pas simplement agi d'envisager la constitution des résultats des deux instructions, puis, en un temps second, de constituer la proposition selon laquelle ces résultats étaient égaux, laquelle pouvait être fausse ou vraie, mais d'affirmer effectivement l'égalité des résultats, c'est-à-dire la vérité de la proposition. En d'autres termes, l'injonction "égaler..." devait être comprise non seulement comme : "mettez en relation d'égalité les résultats", mais aussi : "jugez celle-ci valide". Profondément anachronique au XVII^{e} siècle, cette distinction entre l'énoncé d'une proposition mathématique et celui de sa validité est un point de droit qui ne fut à cette époque nullement soulevé, même chez Leibniz, pourtant soucieux de précisions logiques. Sans doute, semblable distinction aurait eu bien du mal à voir le jour dans le cadre initial d'un seul mode d'expression (la rhétorique).

6.7. Conclusions.

L'emploi des Délimitants, organisant la complétion des assemblages et la production de formes symboliques mathématiques, conjugué avec celui des constitutifs, structurant pour leur part les propositionnelles, constitua une part essentielle de l'élaboration de l'écriture symbolique contemporaine. En fait, tout déchiffrement s'ordonnait -et s'ordonne encore aujourd'hui- autour de chaque constitutif, de la séparation qu'il a initialement instituée, puis des agrégations hierarchisées organisées dans chacune des deux Formes. Ces dernières s'interprètent alors naturellement comme les résultats de deux instructions composées, le constitutif étant ensuite interprété comme affirmation de la véracité d'une certaine mise en relation de ces deux résultats, selon un mode spécifique (adéquation, distinction ou supériorité, par exemple) [22].

---

[22] Cf. sur ce point la conclusion d'ANDRE, op. cit, page VII :

Très vite cependant, il arriva qu'il fut considéré comme nécessaire à l'interprétation de certaines propositionnelles d'ajouter des éléments supplémentaires de signification, qui ne dérivaient pas structurellement du schéma précédent. Ces éléments, pourtant jugés indispensables, furent donc, au XVII^e siècle, apportés depuis l'extérieur du système symbolique, et rhétoriquement exprimés : la question du champ, particulièrement importante, est analysée ci-dessous en 7.9 (*Formes et objets).*

A l'achèvement de la constitution de l'écriture symbolique, manquait cependant un élément essentiel, directement issu du registre des significations : la représentation du Donné. Ce fut l'oeuvre de Viète, que nous examinons dans le chapitre qui suit.

"Les signes d'objets ne sont, pour ainsi parler que des substantifs; les signes d'opérations et de groupement permettent de lier ces substantifs entre eux; les signes de relation nous donnent le moyen d'écrire de véritable phrases. Toute égalité, toute inégalité n'est elle pas une proposition dont le premier membre est le sujet, dont le second membre est l'attribut, et dont le signe même de relation constitue le verbe? Grâce à ce système de ces différents signes, les phrases mathématiques n'ont plus besoin d'être écrites en langage ordinaire : elles s'écrivent à l'aide de notations spéciales et deviennent infiniment brèves, précises et claires. Bien plus, grâce à cette même écriture, il n'est plus nécessaire d'expliquer ni de démontrer à mesure les transformations qu'on leur fait subir : l'algèbre les effectue, sans explications, d'une façon absolument mécanique."

ANNEXES AU CHAPITRE 6

Annexe 1. Apparition du constitutif Deux-traits chez Recorde.

The Arte

as their woorkes doe extende) to distincte it onely into twoo partes. Whereof the firste is, *when one nomber is equalle unto one other*. And the seconde is, *when one nomber is compared as equalle unto .2. other nombers.*

Alwaies willyng you to remẽber, that you reduce your nombers, to their leaste denominations, and smalleste formes, before you procede any farther.

And again, if your *equation* be soche, that the greateste denomination *Cosike*, be ioined to any parte of a compounde nomber, you shall tourne it so, that the nomber of the greateste signe alone, maie stande as equalle to the reste.

And this is all that neadeth to be taughte, concernyng this woorke.

Howbeit, for easie alteratiõ of *equations*. I will propounde a fewe exãples, bicause the extraction of their rootes, maie the more aptly bee wroughte. And to auoide the tediouse repetition of these woordes : is equalle to : I will sette as I doe often in woorke use, a paire of paralleles, or Gemowe lines of one lengthe, thus: =======, bicause noe .2. thynges, can be moare equalle. And now marke these nombers.

1. 14.ze.—+—.15.ϑ.=======71.ϑ.
2. 20.ze.——.18.ϑ=======.102.ϑ.
3. 26.ʒ.—+—10ze=======9.ʒ.——10ze—+—213.ϑ.
4. 19.ze—+—192.ϑ=======10ʒ—+—108ϑ——19ze.
5. 18.ze—+—24.ϑ.=======8.ʒ.—+—2.ze.
6. 34ʒ——12ze======= 40ze—+—480ϑ——9.ʒ.

1. In the firste there appeareth .2. nombers, that is 14.ze.

L'avènement des Deux-traits, comme constitutif pour l'égalité dans *The Whetsone of Witte* de Robert Recorde de 1557. On observera l'exposé des motifs à la fin du dernier paragraphe : "rien ne peut être plus semblable que deux lignes parallèles." Recorde, qui utilise aussi la Croix et le Trait de Widmann, propose diverses équations : $14.x + 15.x^2 = 71.x^2$ pour la première.

Annexe 2. Equations et Deux-traits dans la *Praxis* de Harriott.

In duabus antecedentibus æquationibus accidit interdum binomia a bica[illegible]ationis radicalibus implicata explicari posse per radices iidem binomias, quæ per summam vel differentiam constituant tandem radicem simplicem æquationis explicatoriam. Hu-ius generis solutionum exempla sunt quæ sequuntur.

$$52 = -3.a + aaa \quad \ldots \quad a = 4.$$

$$a = \underbrace{\underbrace{\sqrt{3.)\,26 + \sqrt{675}}}_{2.+\sqrt{3.}} \;+\; \underbrace{\sqrt{3.)\,26 - \sqrt{675.}}}_{2-\sqrt{3.}}}_{4.}$$

$$270 = +9\,a + aaa \quad \ldots \quad a = 6.$$

$$a = \underbrace{\underbrace{\sqrt{3.)\sqrt{18252} + 135}}_{\sqrt{12}+3} \;-\; \underbrace{\sqrt{3)\sqrt{.18252} - 135.}}_{\sqrt{12.}-3.}}_{6.}$$

$$40 = -6.a + aaa \quad \ldots \quad a = 4.$$

$$a = \underbrace{\sqrt{3)\,20 + \sqrt{.391}}}_{2.+\sqrt{.2.}} \;+\; \underbrace{\sqrt{3.)\,20 - \sqrt{292.}}}_{2-\sqrt{.2.}}$$

Un emploi systématique des Deux-traits comme constitutif dans la page 101 de l'*Artis analyticae praxis* , ouvrage posthume (1631) de Thomas Harriott, qui résout ici trois équations cubiques par la règle de Cardan $52 = -3.a + a^3$ (solution $a = 4$), $270 = 9.a + a^3$ ($a = 6$), enfin

$40 = -6.a + a^3$ ($a = 4$).

Annexe 3. La Boucle , dans la *Géométrie* .

tipliées par d'autres connuës. Ce que i'efcris en cete forte :

$$z \propto b,$$
$$\text{ou } z^2 \propto -az+bb,$$
$$\text{ou } z^3 \propto +az^2+bbz-c^3,$$
$$\text{ou } z^4 \propto {}^{*} az^3-c^3z+d^4,$$
&c.*

C'eft a dire : z, que ie prens pour la quantité inconnuë, eft efgale a b ; ou le quarré de z eft efgal au quarré de b, moins a multiplié par z ; ou le cube de z eft efgal a a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z, moins le cube de c ; & ainfi des autres.

Livre I, A.T, VI, 376. La Boucle cartésienne.

Omni-présent dans la *Géométrie*, ce constitutif, n'apparaît, ni dans les *Regulae* , ni dans les *Cogitationes Privatae* de 1619-1621. On ignore son origine. Sa fonction combinatoire était assez neuve en 1637, le seul compétiteur combinatoire étant à l'époque les Deux-traits de Recorde.

Annexe 4. Figures de la "mêmeté", chez Leibniz.

Similar, Congruent.

∝	**Coincident,**	**1679**
ɣ	**Congruent.**	**1679**
$\widehat{E.A.C}$ ɣ $\widehat{F.A.C}$ i.e. E.A ɣ F.A, E C ɣ F.C, A.C ɣ A.C		**1679**
∼	**Similar.**	**1679..**
≃	**Congruent.**	
$\underline{\simeq}$	**Alg. identity.**	**1714?**
|≃|	**Coincident.**	?
≊	***Coincident.***	?
⌣.	**Similar.**	**1710P**
$\overset{\smile}{=}$	**Congruent.**	**1710P**
∝	**Congruent.**	?
∝	**Coincident.**	?

Tableau extrait de CAJORI F, *Leibniz, the Master-Building of Mathematical Notations*, in ISIS, 23, Vol VI, 3. Mars 1925, 412-429.

Première partie :
Le système.

Chapitre 7

Viète

et

l' Indéterminé.

7 . Viète et l'Indéterminé.

7.1 Donné et Requis.

Ce chapitre est consacré à la représentation du Donné dans le texte symbolique, une innovation majeure de la fin du XVIe siècle, due à François Viète, qui introduisit un nouveau système de signes, uniquement constitué de lettres, et dont la fonction véritable consista, en dernière analyse, à faire prendre en charge par l'écriture symbolique deux concepts jusqu'alors considérés comme opposés : l'arbitraire et le fixé ou, plus significativement, le quelconque et le singulier. Cette assomption dans le symbolique de ce qui aurait constitué une contradiction rhétorique, se subsuma par la création, dans les modes de connaissance mathématique, d'une catégorie absolument inédite dans le calcul : l'Indéterminé.

Depuis l'antiquité, les deux catégories épistémologiques du Donné et du Requis avaient accompagné toute question revêtant la forme d'un problème [1]. C'était là un classique couple d'opposés, consubstantiel à l'existence d'un problème, la division grecque étant ensuite reprise par l'Ecole. Au temps d'Euclide, où la géométrie était presque coextensive aux mathématiques, le donné était initialement constitué de configurations géométriques simples (cercles, droites, sections coniques etc...), et le requis par d'autres configurations de ces mêmes types, inconnues et qui devaient être déterminées par constructions. L'ensemble, donné et requis, initialement communiqué sous forme purement rhétorique, s'accompagnait aussi d'une certaine représentation : aux côtés du texte, le donné était incarné dans des figures géométriques. Quant à la construction de la configuration finale recherchée, c'est-à-dire l'essence de la résolution, elle était d'abord indiquée par une liste d'instructions rhétoriquement exprimées, puis à son tour représentée sur une ou des figures géométriques, aux côtés du donné. On notera donc en géométrie, dès l'origine, ces deux registres, rhétorique et figuré.

Nous avons vu comment, lorsque Diophante s'avisa de résoudre des problèmes de logistique, il mit aussitôt en place un système symbolique. La substance du Donné était chez lui celle de nombres explicités (entiers ou rationnels), représentés par des Chiffres, eux-mêmes constitués de lettres de l'alphabet grec; quant à celle du Requis, également un nombre, il le représenta symboliquement par le ζ . Diophante exprimait évidemment ainsi le Requis en tant que tel, c'est-à-dire le Requis inconnu, en une faculté

1 Nous distinguerons par des majuscules, entre le Donné et le Requis, comme catégories, d'avec leurs réalisations effectives dans un texte : le donné et le requis spécifiques d'un problème.

absente en géométrie. Si la figure géométrique permettait ultimement en effet la représentation de la ligne recherchée et trouvée, c'est-à-dire la solution du problème, elle n'autorisait par contre pas celle de la ligne inconnue *per se* : la question pouvait même paraître saugrenue, puisque celle-ci devait précisément être déterminée ! L'écriture symbolique autorisa naturellement au contraire, dès le début, la représentation de l'Inconnu en tant que tel (Cf. chapitre 3 : *L'Inconnu et ses signes*). On conclura donc d'abord que la catégorie du Requis, apparemment primitive, se devra pourtant cliver en deux rubriques : d'une part le Requis inconnu, c'est-à-dire non déterminé, d'autre part la solution, ou Requis déterminé. L'écriture symbolique permet naturellement les représentations des deux concepts, et la figure, celle du second seulement. Quant à l'obtention de la solution, Diophante continua de la fournir au moyen d'une liste d'instructions rhétoriques.

Nous examinerons d'abord les modes de représentation divers, choisis au XVI[e] siècle par l'auteur d'un problème, quant au Donné et au Requis d'une part, quant à la procédure d'obtention du Requis d'autre part, et produirons ainsi un inventaire selon ces rubriques : rhétorique, figuré, ou symbolique. Un inventaire qui sera mené sur deux exemples, typiques des situations rencontrées au XVI[e] siècle : les problèmes "en lignes" (géométriques) et ceux "en nombres" (de logistique numéreuse) ; nous traiterons brièvement aussi des problèmes de calcul justiciables de l'algèbre naissante. Au XVI[e] siècle, avec l'influence croissante de la Logistique, la division entre géométrie et calcul, initiée par Diophante, devint prégnante. Non pertinente au temps d'Euclide, cette catégorisation qui prend en compte la logistique comme un mode en soi, ne peut donc recouvrir celle que donne Proclus qui inventorie classiquement six aspects dans toute "proposition. [2]"

Ainsi articulerons-nous ces deux doubles registres: Donné / Requis et géométrie / calcul, et montrerons comment, au-delà de différences apparentes mais superficielles, une distinction véritable entre géométrie et calcul résultait de la diversité de leurs modes de représentation, figurée ou symbolique, relativement au Donné et au Requis. Nous analyserons ensuite le déchiffrement des textes et la convention d'interprétation, c'est-à-

2 La proposition (προ' τασιζ), l'exposition (ε̌ χθεσιζ), détermination (διορισηο'ζ), la construction (χατασχευη'), démonstration (α' πο' δειξιζ), et la conclusion (συμπε' ρασμα). Traduction de VER EECKE, *Proclus,* op. cit., 180. Cf. aussi HEATH, *Elements,* I, 129. op. cit.

dire ce que, à partir de certaines représentations, soit en géométrie soit dans le calcul, la communauté des géomètres s'accordait, avant Viète, à considérer comme devant être universellement connu. Nous montrerons enfin comment le système symbolique de Viète, par l'introduction d'une faculté supplémentaire dans le calcul, majeure et inattendue, l'écriture de l'Indéterminé, allait bouleverser la nature même de ces conventions, et comment l'antique primauté de fait et de droit de la géométrie, qui n'avait pas été jusques là sérieusement contestée, allait se trouver de ce fait mécaniquement amenuisée au profit d'une discipline mathématique nouvelle venue (le calcul), avant de lui être ultérieurement presque entièrement subordonnée.

Cette invention de Viète dans l'écriture symbolique mathématique : la désignation dans le calcul de ce qu'on appelle aujourd'hui les constantes, fut en effet un élément essentiel du renversement de position entre géométrie et calcul. Une découverte qui n'apparut pas à l'époque comme majeure. Aujourd'hui encore, il ne nous paraît pas que l'histoire des mathématiques lui ait rétrospectivement reconnu la place considérable qui lui revient. Même chez Cajori, elle n'apparaît pas significativement distinguée de la foule des autres innovations en matière de représentations dont le XVIIe siècle mathématique naissant fut si friand.

Dans ce qui suit, on examinera donc successivement et selon nos critères, trois problèmes mathématiques du XVIe siècle : l'un de géométrie, un autre de logistique numéreuse chez Bombelli, le dernier enfin, hybride, est analysé chez Cardan.

7 2. Problèmes en "lignes".

Nous empruntons à Viète notre exemple géométrique; dans son *Introduction en l'Ars Analytic* en effet, et pour bien établir l'exactitude et la nouveauté de sa démarche, il met en regard, à propos d'un même problème, une résolution en lignes (à l'ancienne façon) avec sa nouvelle méthode analytique. Du problème posé et résolu par Viète [3], en dehors de toute écriture symbolique, voici une transcription de l'énoncé et de la solution [4] :

> "Etant donnée la différence de deux grandeurs et leur rapport, trouver ces grandeurs".

3 Viète, *Isagoge*, op. cit, page 76.

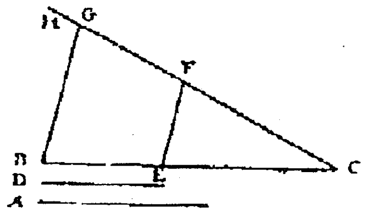
4 Nous utilisons une terminologie légèrement plus moderne que celle de Viète et de Vaulézard (ainsi de "grandeurs" et de "rapport" au lieu de "côtés" et de "raison" respectivement), mais conservons intégralement le détail de ses notations, en particulier littérales. Nous avons d'autre part placé la figure à la suite du texte, alors qu'elle est située à côté de celui-ci dans l'original. On trouvera en annexe un *fac simile* du texte original complet (dans la traduction en français de Vaulézard).

EN LIGNES

"Soit A une grandeur, égale à la différence donnée des grandeurs inconnues. Soient aussi BC et D deux grandeurs telles que leur rapport soit égal au rapport donné des grandeurs inconnues.

On retranche d'abord de BC la ligne BE égale à D. Par le point C, on mène par ailleurs une droite quelconque CH, sur laquelle on détermine le point F tel que CF soit égal à A. On joint ensuite E à F. Par B on mène la parallèle à EF, qui coupe CH en G. Les lignes cherchées sont GC et GF.

Car la différence entre eux est égale à la ligne FC, égale à A, et leur rapport est égal à celui de BC à EF; c'est-à-dire de BC à D, d'après Euclide 1.6, p.2 et 4. Ce qui était proposé."



On observe ici un énoncé typiquement rhétorique suivi d'une représentation du donné par des figures. Comme chez Euclide, les représentations ultérieures du donné dans le texte, même au moyen de lettres (de nature différente, telles D ou BC) ne sont pas opératoires, mais purement désignatives et servent seulement à identifier tel donné, ou telle configuration intermédiaire construite. La représentation de la solution (la grandeur requise) est ensuite effectuée sur la même figure. La procédure de résolution de Viète se résume à une suite d'instructions rhétoriquement exprimées (mener la parallèle, couper deux droites etc...), utilisant les données, le plus souvent sous leur forme désignative. Cette suite d'instructions, supposée être reproductible par tout lecteur, était en fait, depuis Euclide, un modèle de solution en géométrie.

132 Le lecteur se trouvait donc en face d'un texte constitué d'une partie rhétorique et d'une figure. Car Viète ne donnait à son lecteur qu'une seule figure, contenant tout à la fois, comme

amalgamées, les représentations géométriques du Donné, de toutes les configurations intermédiaires construites dans le cours de la preuve, et aussi de la solution. Son seul examen ne pouvait donc permettre de distinguer le Donné du Requis. La partie rhétorique du texte était ici indispensable pour suivre pas à pas les constructions, nécessitant donc un constant va-et-vient chez le lecteur, entre la figure et la rhétorique. Cette situation était -et est encore- tout à fait usuelle. Dans de rares cas de constructions complexes, le géomètre pouvait certes donner plusieurs figures, censées marquer l'avancement de la procédure de construction : chacune d'elle recelait nécessairement néanmoins de façon indistincte un certain nombre des configurations intermédiaires obtenues. Il ne pouvait donc y avoir de déchiffrement, au sens du chapitre précédent, la lecture de la représentation géométrique et l'interprétation rhétorique étant ici indissolublement liées. En d'autres termes encore, la figure géométrique n'étant pas à elle seule investie de la capacité de représenter une suite d'instructions rhétoriquement exprimées, n'avait donc pas, contrairement aux Formes, vocation à exercer ainsi une véritable fonction de représentation symbolique.

Au moment de l'interprétation, un point devenait essentiel : les données devaient être considérées comme *quelconques*. Le fragment de l'énoncé : "Etant donnée la différence de deux grandeurs (...)" était sans conteste interprété comme le fait que cette différence était une donnée quelconque, *fixée, mais arbitraire*. Les deux termes cependant, (arbitraire et fixé) auraient légitimement pu être considérés comme opposés, débouchant sur une forme de contradiction entre le singulier (la grandeur est une, et fixée) et le général (elle est quelconque et peut prendre toutes valeurs à l'intérieur d'un certain champ). De fait, cette convention d'interprétation n'était jamais explicitée, mais devait être induite du contexte rhétorique et de la présence de la figure géométrique. Nous revenons ci-dessous sur cette dialectique omniprésente en mathématiques du "un et quelconque". Quoiqu'il en soit, le caractère implicitement arbitraire de données fixes, géométriquement figurées, était universellement reconnu depuis l'antiquité. Naturellement, si dans la résolution, le géomètre trouvait ultérieurement nécessaire ou opportun d'assigner des valeurs numériques spécifiées aux lignes données, il lui suffisait d'appliquer à ces grandeurs particulières la suite des instructions constituant la solution universelle; après quoi, le résultat particularisé ainsi obtenu devenait à son tour une (ou des) ligne(s) spécifiée(s). Ainsi s'affirma la légitimité de diverses *instantiations* de la procédure universelle initiale.

La question de l'arbitraire et du singulier dans les données, si problématique à exprimer rhétoriquement, pouvait ainsi recevoir une expression adéquate par le moyen de la figure géométrique, le caractère universel du problème posé étant conventionnellement transcrit dans ce type de représentation. Ainsi était-il convenu depuis Euclide que les figures étaient supposées valoir universellement, leur spécificité propre n'entrant pas en compte. Heath note que la figure représentait en fait une *classe* de figures [5]. Dans ces conditions donc, la procédure de résolution apportée par Viète à sa question, c'est-à-dire une suite d'instructions rhétoriquement exprimées, devait être pareillement interprétée comme ayant valeur universelle. Le résultat pouvait alors être érigé en un théorème de géométrie (ce que Viète fait, lui-même, dans la suite du texte). Par le jeu de la capacité reconnue à la figure géométrique, pourtant singulière, de représenter une situation universelle qui la transcende, ce qui, dans cet exemple, aurait pu faire croire à une procédure inquisitoriale existentielle (trouver deux grandeurs qui...) se constituait donc en une méthode générale visant à l'établissement d'une vérité générale. Et c'est bien cette faculté conventionnellement accordée aux figures qui avait permis l'assomption de la contradiction précédemment évoquée entre le "un" et le "quelconque": ce qui aurait pu apparaître comme une indissoluble contradiction à énoncer dans la langue commune et la rhétorique (une grandeur ne saurait être à la fois une et multiple) se trouvait ainsi, dans ce registre figuré, bien simplement dénouée par le simple tracé des divers éléments organisant une figure géométrique.

L'interprétation des figures par les géomètres s'était donc construite sur une convention générale dégageant la figure de sa singularité pour lui conférer valeur universelle. Valoir universellement, c'est dire, en d'autres termes, que deux lecteurs traçant en des lieux différents des figures différentes, à partir du même énoncé rhétorique, étaient censés effectuer deux représentations concrètes contingentes d'un même donné abstrait existant en soi, extérieur donc autant aux deux géomètres qu'à l'auteur du texte. D'une telle convention se dégagea à l'évidence à la fois une conception nécessaire d'objets géométriques idéaux, libérés des contingences de la représentation, et aussi de situations géométriques idéales, en même temps que celle d'un sujet "abstrait" de la connaissance géométrique.

5 "The conclusion can, of course, be stated in as general terms as the enunciation, since it does not depend on the particular figure drawn ; that figure is only an illustration, a type of the *class* of figure and it is legitimate therefore, in stating the conclusion, to pass from the particular to the general. " HEATH, *Greek*, I, 370, op. cit.

Anticipons brièvement les conclusions de 7.5.3 pour constater une profonde différence entre les capacités unanimement reconnues à l'époque aux représentations par le moyen de figures géométriques d'une part, par Chiffres d'autre part. Comme on vient de voir, il était convenu que la présence sur une feuille de papier de trois points et des trois segments de droites les joignant valait pour un triangle "quelconque", c'est-à-dire pour une essence. On verra au contraire *infra* que l'écriture, sur la même feuille, du signe 3, ne fut jamais conventionnellement reconnue comme témoignant de l'essence du nombre entier, dans la mesure ou un calcul ou raisonnement quelconque incluant le chiffre 3 n'entraînait bien évidemment aucune extension de validité à tous les entiers.

7 3. Problèmes en "nombres".

Nous prendrons un exemple, emprunté à l'*Algebra* de Bombelli (1572), légèrement antérieur à Viète [6] : la résolution par le calcul d'une équation commune (en termes modernes : $2\ x^2 + 12\ x = 32$). Nous reproduisons fidèlement les notations de l'*Algebra* qui ne seront pas discutées ici : plus, moins et égalité sont indiqués de façon rhétorique. La Chose est notée $\underset{\smile}{1}$, et son carré $\underset{\smile}{2}$. Voici une traduction adaptée du texte de Bombelli, commentée en note de bas de page, en termes plus modernes :

" Soit à égaler 2 $\underset{\smile}{2}$ p 12 $\underset{\smile}{1}$ à 32

Se réduisant à 1 $\underset{\smile}{2}$ p 6 $\underset{\smile}{1}$ à 16

Prenons la moitié de 6 et ajoutons le au "côté de la puissance"

soit 1 $\underset{\smile}{1}$, ce qui fait 1 $\underset{\smile}{1}$ p 3

dont le carré est 1 $\underset{\smile}{2}$ p 6 $\underset{\smile}{1}$ p 9

et nous voulons 1 $\underset{\smile}{2}$ p 6 $\underset{\smile}{1}$

Par conséquent nous ajouterons 9 aux deux parties ce qui donnera

1 $\underset{\smile}{2}$ p 6 $\underset{\smile}{1}$ p 9 égal à 25 .

Les côtés respectifs sont égaux : 1 $\underset{\smile}{1}$ p 3 $\underset{\smile}{1}$ égal à 5 .

6 Extrait de CASSINET J, *Equations du second degré*, 50, op. cit.

En enlevant 3 de chaque partie : 1 $\cup$ égal à 2.
La chose est égale à 2." [7]

La représentation du Donné est ici explicite sous la forme de Chiffres (2, 12, 32), le Requis inconnu (la Chose) ainsi que le Carré étant symbolisé par un signe primitif (cf. 3.3), que nous appellerons le Creux (Cf. chapitre 8 : *Puissances. De Diophante à Viète).* Bombelli établit d'autre part une preuve "en nombres"; utilisant pour partie l'écriture symbolique, elle présente, par rapport aux démonstrations "en lignes", des avantages méthodologiques incontestables et aussi des inconvénients. Comme on a vu, le Requis inconnu ne pouvait être représenté par les figures géométriques. Qu'il le soit naturellement ici, dans la symbolique de Bombelli, implique dans le déroulement de la preuve ces mêmes importantes conséquences, décrites en 3.2: mode hypothétique, procédure analytique, automaticité forte du calcul, toutes modalités inexistantes dans les résolutions "en lignes". En effet, la résolution géométrique de Viète *supra*, pour simple qu'elle ait été, demandait à chaque étape une invention nouvelle, qui n'était nullement automatique. Soulignons enfin la forme de la solution de Bombelli: non pas une suite d'instructions comme dans le cas "en lignes", mais un nombre explicité : "la" valeur de la chose, racine de l'équation [8]. Sauf à envisager à partir de ce résultat un raisonnement sans preuve, par analogie ou induction, la valeur numérique obtenue n'est donc pas source d'un théorème. Ce caractère nécessairement singulier des résultats souligne donc *a contrario* les avantages des résolutions "en lignes".

Comme on l'a déjà noté, la mise en regard des problèmes "en lignes" avec ceux "en nombres", découvre donc une différence profonde entre les conceptions des géomètres du XVI^{e} siècle, quant aux représentations du Donné et du Requis, soit figurées, soit symboliques. La figure géométrique avait sans doute une singularité, mais qui était postulée non signifiante. Dans ces conditions, ce qu'elle représentait et transmettait, ce qu'elle était donc en mesure de révéler à tous, n'était pas la valeur numérique de telle

7 On considère l'équation $2x^2 + 12x = 32$, équivalente à $x^2 + 6x = 16$.
On ajoute la moitié de 6 à x, soit $x + 3$. Elevant au carré, on a
$x^2 + 6x + 9$. On veut $x^2 + 6x$. En ajoutant 9, il vient
$x^2 + 6x + 9 = 25$. Les racines des deux membres sont égales : $x + 3 = 5$.
En soustrayant 3, il vient $x = 2$.

8 Bombelli considérait qu'il n'est qu'une solution à l'équation (positive, en termes modernes). Il n'était en fait intéressé que par "la racine", et non par l'équation *per se*. Sur cette position, du "physicien", très répandue à l'époque, et qui prendra fin avec Harriott et Descartes, nous renvoyons à l a discussion en 3.5. En fait, l'équation proposée admet - 8 pour autre racine.

ligne donnée qui la composait, mais, pour prendre des exemples simples, l'essence d'un triangle ou celle d'une situation de quatre droites concourantes. En ce qui concerne la logistique numéreuse, les conceptions du XVI^e siècle étaient autres : le donné d'un calcul se résumait entièrement à ce qui était représenté par Chiffres, c'est-à-dire par des signes nécessairement interprétés comme des nombres. Ce donné était alors aussitôt connu de tous. Seule en effet la reconnaissance d'un Chiffre dans le texte communiquait à tous les lecteurs la connaissance d'une même valeur. D'un autre côté, tout signe primitif, toute Lettre, indiquait la présence d'un Requis inconnu: il y avait donc bien convention universelle d'interprétation, portant sur la nature indéterminée de la chose et la persistance de sa substance, mais non évidemment sur la valeur elle-même, puisque celle-ci était précisément inconnue (cf. nos conclusions de 3.4).

Dans le calcul avant Viète donc, le connu de tous se confondait avec le numérique, et lui-même avec le Donné. Dans ces conditions, l'énoncé d'un problème numérique entremêlait ces quatre types de signes seulement : Chiffres, interprétés comme le Donné, Lettres ou signes primitifs, comme Requis inconnu, assembleurs, enfin Délimitants, associés à l'exécution des instructions.

7.4. L'algèbre avant Viète.

Dans les problèmes "en nombres", la représentation partiellement symbolique du XVI^e siècle pouvait donc apparaître comme techniquement satisfaisante -par l'automatisme induit dans le calcul- en même temps que largement insuffisante méthodologiquement, par le défaut d'universalité qu'elle véhiculait. Entre géométrie et calcul, une méthodologie hybride s'était développée, depuis Luca Pacioli. Spécifique de questions que nous dirions aujourd'hui strictement algébriques, comme la théorie des équations, elle empruntait cependant son principe à la géométrie, dont elle épousait la visée universelle et le mode rhétorique de représentation du Donné et du Requis. Une procédure largement utilisée au XVI^e siècle par l'Ecole Italienne.

Nous reprendrons pour l'illustrer notre exemple de Cardan du chapitre 6 : "Le Quarré égalé à la Chose et au Nombre", dont le titre même demande quelque explication. Si "Nombre" désigne un nombre donné quelconque, "Chose" est ici ambigu. Classiquement c'était l'inconnue elle-même, c'est-à-dire le Requis inconnu. Chez Cardan, le terme désignait ce qu'on appelle aujourd'hui le coefficient de l'inconnue, qui était au contraire une donnée. Sans que ceci soit explicité, cette donnée, comme celle du "Nombre", était censée être arbitraire, comme en géométrie [9]. Un exemple typique donc, où Donné et Requis inconnu se trouvaient indiqués rhétoriquement. Quant à la solution, elle était également fournie en les termes purement rhétoriques d'une suite d'instructions; nous renvoyons sur ce point au chapitre 6 où nous l'avons intégralement reproduite. Comme en géométrie donc, cette procédure de logistique fournissait, sous forme rhétorique, une réponse universelle à une question universelle. Entre géométrie et logistique, cette méthode hybride italienne pouvait donc sembler séduisante. On en a cependant décrit *supra* inconvénients et limitations intrinsèques, qui tiennent toutes au niveau de complexité - très vite rhédibitoire - d'une séquence composée d'instructions rhétoriquement exprimée. Sur ce point, l'incontestable avantage de l'écriture symbolique était de permettre écriture et déchiffrement de séquences complexes.

Telles étaient donc, au XVI^e siècle, les conceptions des problèmes "en lignes" et "en nombres" [10]. On conçoit bien l'avantage structurel considérable que la géométrie présentait alors sur le calcul. On comprend aussi qu'en dépit de rencontres multipliées avec l'algèbre des Arabes, les procédures géométriques aient continué d'être, à la suite d'Euclide, la voie royale d'accès aux mathématiques. Des plus humbles auteurs aux plus illustres (Luca Pacioli, Tartaglia, Cardan, Clavius), les ouvrages mathématiques du temps regorgent d'exemples géométriques semblables à celui de Viète. Ce qui, des siècles durant, s'était appelé résolution en "lignes" d'un problème commença certes d'être dénommé "démonstration géométrique" : les méthodes géométriques demeuraient le juge de paix en matière de rigueur des raisonnements et de validité des preuves.

L'invention de Viète revint alors dans les faits à introduire une symbolique par laquelle on pourrait continuer d'user des considérables avantages des preuves "en nombres" (mécanismes et automaticité du calcul, écriture de séquences complexes d'opérations), tout en conservant le caractère universel des énoncés et des solutions, particulièrement la considération du Donné comme

9 Le "Quarré", par contre, désigne chez Cardan l'inconnue multipliée par elle-même, sans intervention d'un coefficient, ce dernier étant toujours censé être égal à l'unité : x^2, en termes post-cartésiens, et non a. x^2. Dans la terminologie de Viète, il s'agit d'une puissance "pure de toute affection", ou encore "non affectée ". Cf. VIETE, *Isagoge*, 29, op. cit. et l'analyse de RITTER, op. cit. 381.

10 Cf. *De la Géométrie au moyen-âge et chez les modernes* in CHASLES, *Inauguration*, 561 - 576. op. cité.

arbitraire, qui avait été le privilège véritable de la géométrie. Ce n'est cependant pas ainsi que Viète présenta une découverte que nous allons maintenant étudier.

7 5. L'écriture symbolique chez Viète.

7.5.1 Schéma littéral et exemple introductif.

On peut ainsi reformuler une conclusion de la précédente section : s'il était au XVIe siècle des figures géométriques regardées comme génériques, il n'y avait pas de représentation des nombres "quelconques". Rappelons aussi que, pour représenter l'Inconnu dans le calcul, un symbole primitif non chiffré, et spécialement une Lettre, avait été nécessaire, précisément parce qu'il était inconnu. Viète introduisit alors des lettres pour *représenter aussi le Donné.* Celles qu'il se proposa d'employer étaient cependant de type alphabétique différent, selon la nature du représenté. Voici Viète sur ce point fondateur:

> "Or afin que ceci soit aidé par l'art, les grandeurs données seront distinguées des requises par un symbole constant perpétuel et apparent, en signifiant les grandeurs requises par l'élément Alphabétique A, ou quelques autres voyelles, E, I, O, U, Y, et les données par les éléments B, C, D, ou quelque autre des consonnes." [11]

Pour illustrer sa démarche, nous prendrons l'exemple par lequel il commence son " Zététique I" [12] (page 73), et dont voici l'énoncé:

> "Etant donnée la différence de deux côtés et l'agrégé [13] d'iceux ; trouver les côtés."

La solution de Viète, transcrite par de Vaulézard, est celle-ci:

> "Soit donnée la différence des deux côtés B, l'agrégé d'iceux D, il faut trouver les deux côtés.

11 Viète, *Isagoge*, 47. Cf. *fac simile* de de Vaulézard en annexe.
12 Viète, *Isagoge*, 73.
13 La somme.

Soit le moindre côté A, le majeur sera A + B, donc la somme des côtés sera 2 A + B : Mais la même est donnée D ; par quoi 2A + B sont égaux à D, laquelle équation est réduite par l'Antithèse [14] de B sous contraire affection de signe, en 2A égaux à D - B, et le tout étant divisé par 2 ; A sera égal à $\frac{D - B}{2}$.

B soit 40. D 100. A vaudra 50 -20, c'est 30 et A+B 70, leur somme 2A + B, 100, leur différence 40, conforme au requis."

Le résultat terminal que Viète communique est alors, en substance: "si l'on appelle B la différence et D la somme des deux côtés recherchés, alors le plus petit côté vaudra :

$$\frac{D - B}{2}.\text{"}$$

Ainsi en est-il du tout premier exemple historique d'un problème résolu avec une écriture symbolique purement littérale. En place d'une résolution rhétorique, Viète a en effet conclu par une égalité en écriture symbolique, valable quelles que soient les interprétations de B et D, ce que Leibniz appellera un *canon* ou une *formule*.

7.5.2 Le projet de Viète.

La visée initiale de Viète était, elle aussi, claire : représenter symboliquement dans le calcul les données, aussi bien que les inconnues, ce qu'il était le premier à faire. Et, après lui, l'utilisation exhaustive de toutes les lettres de l'alphabet constitua désormais celui-ci comme ce réservoir des signes non numériques,

---

14 L'*Antithèse sous contraire affection de signe*, de Viète n'est autre que l'*al ja'br* des Arabes, c'est à dire l'opération (transposition) qui fait passer les termes d'un membre à l'autre d'une égalité en en changeant le signe (ici la grandeur de signe B).

Viète ne s'est pas satisfait des deux opérations de base de la tradition arabe, mais, en bon juriste, a méticuleusement inventorié, puis détaillé, la moindre manipulation algébrique qu'il jugeait nouvelle, la dénommant dans une terminologie insolite et obscure, qui lui est restée spécifique, et qui n'a pas peu contribué à l'oubli dont son oeuvre est aujourd'hui entourée. Ainsi, outre l'Antithèse, découvre-t-on l'*Hypobibasisme* (ou Abaisssement), qui fait disparaître une part de l'inconnue par division, lorsqu'elle est possible. Ainsi en termes post-cartésiens, l'équation

$2x^4 + 6x^3 = 10x$ est-elle équivalente, par Hypobibasisme, à :

$2x^3 + 6x^2 = 10$. La même réflexion se trouvait dans la *Summa di Aritmetica* de Luca Pacioli. De même, le *Parabolisme* (Division) revient à diviser, lorsque c'est possible, tous les coefficients d'une même équation par le coefficient dominant, celui du terme de plus haut degré (les coefficients étaient implicitement supposés entiers, et la division se faisait, en termes modernes, par leur p. g. c. d.). Ainsi :

$2x^3 + 6x^2 = 10$ était-elle équivalente, par Parabolisme, à :

140 $x^3 + 3x^2 = 5$.

Il est ainsi, chez Viète, un luxe de détails et une foule de définitions. On trouvera par exemple encore l'*Analogisme*. Sur cette partie, voir RITTER, op. cit, 378-379.

interprétés comme inconnues ou données, en contrepoint des Chiffres, interprétés par des nombres. Comme indiqué en 3.4, nous appellerons désormais Lettres ces signes alphabétiques, pourvus de leur syntaxe combinatoire. Une division Lettres - Chiffres, constitutive de l'écriture symbolique, initiée par Viète, et qui deviendra la règle, entrainant l'abandon des Figures cossiques.

7 . 5 . 3 Déchiffrage. Analyse de l'énoncé. Indéterminé.

Le lecteur déchiffrait en reconnaissant des Lettres dans le texte symbolique : qu'elles fussent voyelles ou consonnes, elles étaient gouvernées par la même syntaxe que les signes primitifs d'inconnue : occuper la (ou les) place(s) créée(s) dans le texte par les divers assembleurs. Au moment de l'interprétation cependant, la division voyelles-consonnes [15] venait en principe dicter deux interprétations différentes : inconnues ou données.

Dans sa définition, Viète avait en effet pris soin de réclamer un "symbole perpétuel et apparent" pour "distinguer les grandeurs données des requises". Cette même définition cependant, comprise par les géomètres de son temps, et selon les règles alors en vigueur, ne manquait pas de receler une contradiction, due à ce fait simple, qu'on vient d'examiner : dans tout calcul à cette époque, le Donné était cela seulement qui était susceptible d'une représentation explicite "en nombres". Dire, comme Viète, que la consonne B par exemple représentait une grandeur donnée, signifiait donc, en principe, que, par le signe B, était représenté un nombre fixe, à la valeur connue de l'auteur du texte. Dans ces conditions cependant, le lecteur n'en avait certes pas la connaissance ! Comment dans ce cas Viète pouvait-il affirmer que B était le signe d'une donnée? Si nous inclinons rétrospectivement aujourd'hui à les juger inconsistantes, les objections du temps à une telle conception de la connaissance et de la représentation ne peuvent être négligées et rejoignent celles qu'ultérieurement les protagonistes de l'affaire de l'axiome du choix s'adressèrent dans leur correspondances : comment deux lecteurs qui s'ignorent sont-ils sûrs de "penser" toujours à la même valeur [16]?

---

15 A propos de cette division, C. Henry remarque : "Donc, dans un siècle qui connut si peu d'orientalistes que celui de Viète, il peut être difficile de ne pas regarder ce choix comme une indication de la renaissance d'une langue Sémitique ; chacun sait que c'est seulement en pays hébreu et Arabe que les consonnes sont données et que les voyelles doivent être retrouvées à partir d'elles."*Sur l'origine de quelques notations mathématiques*. Revue archéologique. Vol XXXVIII, (Nouvelle Série 1879), page 8.

16 Cf. notre analyse dans SERFATI, *Choix*, op. cit, 223 en particulier.

Cette apparente contradiction et ces objections méthodologiques furent donc autant d'obstacles épistémologiques respectables, qui expliquent à notre sens pourquoi, alors qu'il est aujourd'hui éclatant que la représentation du Donné par Lettres a été un élément décisif dans le développement des mathématiques, cette découverte majeure, qui n'a aucunement accompagné la première algèbre de Diophante, n'ait vu le jour que treize siècles après lui.

Dépassant donc la définition que donna Viète de la représentation du Donné, contradictoire à notre sens pour les lecteurs du temps, il nous faut en vérité retourner vers sa pratique pour en comprendre les usages effectifs. Et l'exemple ci-dessus est alors démonstratif du véritable fond : placé devant le B du calcul précédent, tout ce que chaque lecteur peut (et doit) seulement affirmer, c'est que l'auteur déclare que, sous la Lettre, il est un nombre dont lui-même considère la valeur comme fixée (elle ne sera donc pas objet pour lui d'une procédure inquisitoriale), et qui est la même tout au long du texte : comme en géométrie, il n'y a donc plus ici de connaissance universelle d'une valeur communicable à tous, conformément au projet initial de la Logistique numéreuse, mais seulement de cette convention d'interprétation inscrite dans la notation : tous les lecteurs doivent s'accorder sur le fait que la Lettre B vaut pour un certain nombre dont la valeur est connue de tous, de la même façon, au long du texte. Il faudra donc désormais distinguer, dans le calcul, entre la catégorie du "Donné" et celle de "à la valeur donnée". Si on s'est évidemment ici écarté du modèle logistique simple précédent, qui distinguait seulement entre l'explicite et le non explicite, on retrouve par contre, à propos du calcul, le schéma épistémologique "géométrique" classique. A l'évidence, seule cette interprétation de la définition de Viète, originée dans sa propre pratique, permet de dénouer la contradiction fondatrice.

Que le système des Lettres de Viète fut en vérité la représentation d'une convention quant au Donné et non son explicitation, peut donc être regardé après-coup, comme un moyen, en quelque sorte nécessaire, de dépasser la contradiction initialement inscrite. Cependant, cette disparition de l'explicite dans la symbolisation du donné, pour "nécessaire" qu'elle fut, allait à son tour mécaniquement entraîner, au moment de l'interprétation, cette faculté nouvelle : considérer ce Donné comme arbitraire. Si en effet la seule information fournie par la Lettre comme signe, était d'indiquer une convention portant sur la catégorie du représenté (le Donné) et non d'expliciter sa valeur, alors celle-ci, bien que fixée, était libre
142 d'être arbitrairement choisie. En d'autres termes encore, le B de l'énoncé de Viète était bien le signe d'une quantité donnée au sens

précédemment défini, mais d'une donnée quelconque. Ce point central de l'arbitraire, nullement explicite dans l'*Isagoge* fondateur, fut cependant opératoire dès l'examen de son premier exemple et découla incontestablement de l'interprétation que, dans sa pratique, Viète fit de sa propre notation. On reconnaît ainsi, appliquée au calcul, cette même dialectique du "singulier mais quelconque", constitutive du schéma géométrique, et dont les corollaires, plus haut énoncés, demeurèrent alors semblablement valides en Logistique : constitution d'objets idéaux et, corrélativement, d'un sujet abstrait de la connaissance mathématique.

Par le système symbolique de Viète, l'écriture et le calcul, tout comme la géométrie avant eux, se réorganisèrent désormais autour d'une convention universelle d'interprétation des consonnes comme Donné. S'il existait à ce moment d'autres interprétations universelles des signes, tant Lettres que Chiffres, la situation était cette fois différente. S'agissant en effet d'un signe primitif, la valeur qu'il représentait était inconnue de tous de la même façon : l'interprétation se trouvait donc *ipso facto* universelle sans convention supplémentaire. Quant aux Chiffres, ils ne pouvaient davantage faire l'objet d'une divergence d'interprétation, cette fois pour une autre raison : dès qu'un Chiffre était exhibé, son interprétation était connue de tous : la valeur d'un nombre, dont la reconnaissance unanime était chose première. La convention réclamée par Viète pour la signification des consonnes n'avait au contraire aucune valeur universelle *a priori*, mais répondait à cette nécessité : prévenir de possibles différences d'interprétation entre un lecteur et l'auteur, ou entre deux lecteurs : ceux-ci auraient pu tout naturellement attribuer des valeurs différentes à la Lettre C par exemple, symbolisant un donné. L'universalité de la convention vint donc ici, depuis l'extérieur du symbolique, de façon à redresser une possible ambiguïté dans l'interprétation. Ainsi, la convention de Viète, si elle fut donc *ad hoc*, était cependant contingente, issue de considérations propres au registre des significations et non pas d'une nécessité absolue, interne au système symbolique, comme par exemple le fait que le nombre de parenthèses ouvrantes devait être égal à celui des fermantes. En vérité, rien, dans le registre combinatoire, ne viendra jamais distinguer entre les Lettres à interpréter comme Inconnu de celles représentant le Donné indéterminé.

En première analyse, la notation de Viète revint donc à modifier dans les fait les catégories initiales de la connaissance en jeu dans tout calcul. Le Donné aura été ici clivé entre Donné explicite, à la valeur connue de tous, et Donné à valeur non explicite qu'on appela l'*Indéterminé*. En même temps, comme on l'a vu, 143 l'Indéterminé s'était révélé consubstantiel à l' "arbitraire mais fixé". Symétriquement, le Donné explicite fut appelé en retour le Déterminé. On a observé que si ce schéma épistémologique était neuf dans le calcul et si son introduction par Viète y bouleversait les catégories, la même division avait été de tous temps présente en géométrie. Certes, le terme d'Indéterminé n'avait pas appartenu au vocabulaire de la géométrie, mais, comme on l'a vu, il était convenu que lès lignes quelconques tracées sur une figure étaient, en vérité, des indéterminées. Nous n'avons pas ici suivi Frege (dans *Qu'est-ce qu'une fonction* ?), pour qui "indéterminé" est contradictoire en tant qu'adjectif : seule existerait l'indétermination comme modalité, grammaticalement représentée par l''expression adverbiale "indiquer de manière indéterminée" (*Unbestimmt andeuten*) [17].

Parce qu'il n'avait pas su produire une telle convention qui fût inscrite dans son écriture, le système cossique ne permit pas la représentation de l' "arbitraire, mais fixé". Les tentatives, à l'intérieur du système, en vue d'une semblable symbolisation ne conduisirent qu'à des ambiguïtés. Ainsi, le jeune Descartes, tout juste sorti de La Flèche, ne connaissant que le cossique de Clavius, et souhaitant désigner à la fois le coefficient arbitraire de la Chose, puis un autre nombre quelconque (qu'il appelle le "nombre absolu"), s'autorisa implicitement du caractère arbitraire commun pour utiliser deux fois le même symbole O. La confusion cartésienne entre marque et signe pour un concept, (ici l' "arbitraire"), est celle que nous avions analysée chez Diophante au sujet de l'Inconnu (Cf. 3.4 *Signes ou marques*). Portant sur la substance même de l'interprétable, elle rend inexploitable cette partie du texte de la lettre à Beeckmann [18].

7.5.4 Canons et formules.

---

17 Ainsi : "M.E Czuber a tenté de remédier à quelques unes des difficultés que nous venons d'évoquer. Pour se libérer du temps, il interprète la variable comme un nombre indéterminé. Y aurait-il des nombres indéterminés? Faut -il partager les nombres en déterminés et indéterminés? Y-a-t-il des hommes indéterminés? Tout objet ne doit-il pas être déterminé?

(...) Certes il y a bien lieu de parler d'indétermination, mais "indéterminé" n'est pas un qualificatif épithète de "nombre", c'est plutôt un adverbe modifiant "indiquer". On ne dira pas que "n" désigne un nombre indéterminé, mais qu'il indique de manière indéterminée des nombres. Il en va toujours ainsi lorsque la langue arithmétique emploie des lettres, à l'exception des rares cas où elles figurent comme des noms propres (π, e, i). Elles désignent alors des nombres déterminés invariables. "in *Was ist eine Funktion* ? in *Festschrift L. Boltzmann gewidme zum 60. Geburstage.* Leipzig A. Barth, 1904; pages 656-666. Traduit (*Qu'est-ce qu'une fonction* ?) " par IMBERT C, *Ecrits logiques...*, op. cit, 163.

18 Cf. sur ce point SERFATI, *Naissance...*, op. cit., 60. Voir aussi COSTABEL P. : *La Mathématique de Descartes avant la Géométrie*, in *Démarches originales de Descartes savant*, op. cit, 29.

Revenons au second des exemples de Viète (7.5.1), qui fournit pour solution la formule :

" Le plus petit côté vaudra $\frac{D - B}{2}$. "

Son déchiffrage par le lecteur devait prendre nécessairement en compte le schéma précédent : la Barre et le Trait étaient reconnus comme assembleurs, dotés de niveaux, B et D comme Lettres et, dans le contexte de Viète, interprétés comme quantités données arbitraires. Ce qui était donc communicable, par cette formule n'était nullement, comme dans le calcul en "nombres", une valeur numérique explicite, mais comme en géométrie à nouveau, une suite ordonnée d'instructions universellement valide, à partir de laquelle le résultat pouvait être calculé. Contrairement à la géométrie cependant, cette suite d'instructions est ici symboliquement condensée et non rhétoriquement écrite. Ainsi un canon, produit-il une forme concise et non ambiguë du résultat. D'autre part, la représentation de l'Indéterminé selon le système de Viète, est, à lécriture des canons, une condition *sine qua non.* Sur ce point, c'est Leibniz qui rendra le meilleur hommage à Viète en lui attribuant l'invention de la Spécieuse [19] :

> Je suis bien aise qu'il [sq. Ozanam] fasse revivre une partie des préceptes de Viète, inventeur de la Spécieuse, qui méritaient de n'être point oubliés.

Plus loin, Leibniz donne [20] cette excellente définition d'un canon :

> J'appelle Canons, des formules générales, qui donnent d'abord ce qu'on demande.

Et en effet, si un canon donne "d'abord" - c'est-à-dire immédiatement ce qu'on demande, l'écriture rhétorique qui en résulterait, comme interprétation, pourrait au contraire être fort longue. Ainsi, note André [21] :

> "De la formule qui donne l'espace parcouru pendant un temps déterminé, dans le mouvement rectiligne uniforme, on déduit ainsi, en deux ou trois lignes d'écriture algébrique, toutes les lois de ce mouvement : Galilée, qui ne faisait pas usage de formules, consacre quatre pages à les établir (*Giornata terza, de Motu Aequabili).*"

---

19 *Remarque sur un Endroit des Nouveaux Eléments d'Algèbre de Mr Ozanam.* Journal des Sçavans. 1703 = M.S, VII, 216.

20 idem, 217.

21 ANDRE, op. cit. page XI.

De même, l'écriture rhétorique interprétant le résultat de notre exemple (7.5.1)*supra* sous forme d'une suite d'instructions, aurait demandé deux lignes d'écritures accompagnées d'indispensables précautions pour lever l'équivoque dans l'ordre d'exécution des instructions [22]. Dans le meilleur des cas, la solution de la question aurait été communiquée selon ce modèle :

> "Quelles que soient les valeurs que l'auteur ou le lecteur du texte attribue à la somme et la différence des côtés, la longueur du plus petit côté s'obtiendra en retranchant la différence de la somme, puis en divisant par deux le résultat".

Sur ce dernier canon, véritablement très simple, les avantages et privilèges de l'écriture symbolique sur la rhétorique peuvent néanmoins ne pas apparaître décisifs. On a cependant déjà vu en 5.4 un exemple plus complexe : si la description de la solution de l'équation du second degré requérait pareillement une brève formule symbolique, elle avait par contre demandé à Cardan quatre lignes rhétoriques peu claires qui devaient être soigneusement examinées avant toute exécution. Encore au XVI^e^ siècle, la solution de l'équation commune était-elle un morceau de théorie simple, depuis longtemps connu et repéré. La résolution, alors toute nouvelle, de l'équation du troisième degré est alors plus éclairante : pour en communiquer à Cardan la solution sous forme rhétorique -la seule évidemment qu'il connût- Tartaglia dut utiliser, pour chacun des trois cas, une règle-comptine en neuf vers, dont le texte devait être de surcroît fort ambigu puisque, confondant l'ordre des opérations, c'est-à-dire le cube du tiers et le tiers du cube, Cardan commença par se tromper [23]. Symboliquement écrit pour la première fois par Descartes à l'aide du système de Viète, le canon pour la règle de Cardan vint occuper dans la *Géométrie* [24], une ligne de calcul et une seulement : une démonstration éclatante de la puissance de la toute nouvelle

[22] Après avoir donné sa propre solution, en termes symboliques, de la façon plus haut décrite, Viète reprend ensuite rhétoriquement "en lignes", à la fois l'énoncé et la résolution du même problème (page 74). Il énonce : "De la somme des côtés, on retranche la différence. Le résultat est divisé par deux. C'est la valeur du petit côté. "

[23] La rencontre entre Tartaglia et Cardan fut en vérité un prodigieux jeu de dupes. Cf. notre récit dans SERFATI, *Le secret...*, op. cité, 14.

[24] Nous en avons donné un *fac simile* dans l'exemple introductif du 1.1. Descartes l'appelle "reigle dont Cardan attribue l'invention à un nommé Scipio Ferreus " (A.T, VI, 471). La référence à Scipion Del Ferro est tout droit sortie des premières lignes du Chapitre XI de l'*Ars Magna*. Ceci établit sans conteste qu'avant la rédaction de la *Géométrie*, Descartes avait lu l'*Ars Magna* : à l'exception de la note de Cardan en effet, Scipion Del Ferro, dont aucun papier n'a survécu, était un auteur inconnu de la communauté mathématique. (Cf. notre analyse détaillée dans SERFATI, *Le secret...*, op. cité, 20).

écriture symbolique. En vérité, eu égard au nombre d'opérations successives à exécuter dans un ordre prescrit, la complexité de la description de la résolution de l'équation cubique atteignit les limites de ce qui pouvait être rhétoriquement compris et exécuté par les géomètres du temps, même si ceux-ci étaient plus familiers que nous avec le mode d'emploi d'une liste d'instructions opératoires. A l'époque cependant, l'équation cubique ne constitua pas davantage un point d'achèvement en mathématiques : au début du XVII^{e} siècle en effet, d'autres questions, à la résolution à la fois plus générale et plus complexe à décrire, commençèrent à se présenter : comment en fournir énoncé et résolution rhétoriques?

Les privilèges de l'écriture symbolique pour l'écriture des canons, dispensant d'exemples numériques chaque fois répétés, furent largement soulignés par Leibniz, dans *Mathesis Universalis* [25] :

> "Inter ipisus Algebrae desiderata semper habui Tabulas quasdam ac velut series Theorematum sive Canonum, quis si condidit haberentur semel in universum, magno ac taedioso atque semper in novis exemplis idem saxum volvendi onere nos levarent, praeterquam quod mirifice augerent scientiam et rationem darent multa pravidiendi primo aspectu, quae nunc ipso calculi exitu sera sapientia discimus."

Une argumentation qu'il reprit dans la *Praefatio Clavis Mathematicae Arcanae.* [26] Ce texte contient d'abord, succédant à celle de Viète, une nouvelle définition de la Logistique : c'est, dit tout simplement Leibniz, le Calcul qui venait avant lui, celui qu'il avait donc reçu de Viète et Descartes, utilisant donc les "cinq opérations" cartésiennes (*addendi, subtrahendi, multiplicandi, dividendi et radices extrahendi*), mais portant désormais à la fois sur le Déterminé et l'Indéterminé, et auquel Leibniz va substituer son propre Nouveau Calcul (Cf. 12.2 *Le Nouveau Calcul chez Leibniz*). On y remarque aussi la définition, nouvelle à l'époque, d'un "Algorithme" pour désigner ce que Viète avait appelé Logistique numéreuse, ainsi que la thématisation du concept d'équation (*aequationem, quae exprimat relationem inter cognitas et incognitas*). On notera enfin la référence à Diophante, reconnu par Leibniz comme père fondateur de l'Algèbre:

25 M.S, VII, 50.
26 M.S, VII, 11.

> "Logisticam seu modum calculandi, id est addendi, subtrahendi, multiplicandi, dividendi et radices extrahendi, idque tum in numeris indeterminate et generaliter sumtis, tum in numeris determinatis per characteres suos expressis, quod vulgo vocant Algorithmum (...) Inde explicabo Algebram, id est modum inveniendi valores incognitorum numerorum literis expressorum, sive modum logisticae praeceptis ita utendi, ut primum nanciscamur aequationem, quae exprimat relationem inter cognitas et incognitas (...) Algebram sequitur Arithmetica Diophantea(...)."

Et Leibniz de se livrer ensuite à une glorification, constante chez lui, des "merveilleuses" Tables Analytiques. Ces Tables leibniziennes étaient en fait constituées d'une recension et d'un regroupement de canons.

> "Subjiciam Specimen Tabularum Analyticum mirificarum, quibus calculus literalis magis contrahetur, quam calculus numerorum per logarithmos. His tabulis omnis calculus literalis imposterum ludus jocusque erit.

Mis à jour pour la première fois par Descartes dans les *Regulae* (Cf. 10.1 [27]), si fort prisés par Leibniz, les privilèges des canons littéraux furent dès lors rituellement l'objet de louanges comparatives. On l'a déjà noté ci-dessus sur le chapitre de Galilée. De la même façon, Lagrange et Delambre, commentaient ainsi la traduction des oeuvres d'Archimède [28]:

> La démonstration d'Archimède a trois énormes colonnes in folio et n'est rien moins que lumineuse. Eutochius commence sa note en disant que le théorème est fort peu clair, et il promet de l'expliquer de son mieux. Il emploie quatre colonnes du même format et d'un caractère plus serré sans réussir davantage; au lieu que quatre lignes d'algèbre suffisent à M. Peyrard pour mettre la vérité du théorème dans le plus grand jour.

27 Des *Cogitationes Privatae* aux *Regulae*. Le jeune Descartes.

28 Dans un rapport à l'Institut sur la traduction par Peyrard des Oeuvres d'Archimède. L'anecdote est rapportée par Babbage, in *On the influence of Signs in Mathematical Reasoning*. Transactions of Cambridge Philosophical Society. Vol II (1827), 330.

7.5.5 Autres symbolisations chez Viète.

Pour les puissances, qu'elles soient d'inconnues ou de données, Viète employa une écriture rhétorique, scindée par une double batterie d'adjectifs latins, destinée à rendre compte avec exactitude de sa doctrine de l'homogénéité, que nous exposerons plus loin. C'est ainsi que pour le carré, Viète proposa l'un ou l'autre de deux adjectifs, *planus* ou *quadratus*, et écrivit par exemple :

A *quadratus* et B *plano*

pour notre moderne $A^2 + B$ (B possède la dimension physique d'un carré). Dans une autre étude [29], nous faisions observer qu'en distinguant entre ces deux types de "quarration", Viète s'était comporté comme le juriste qu'il était, certes rigoureux, mais peu soucieux des réalités de l'écriture mathématique : irréfutable en droit, cette division était inapplicable en fait. Il revint à Descartes d'avoir su la dépasser, sans pouvoir toutefois la fonder en droit, la justification n'en venant qu'à la fin du XIXe siècle [30].

D'un autre côté, l' "algèbre" de Viète, qui fut unanimement considérée à la fin du XVIe siècle comme apportant un bouleversement dans l'écriture mathématique, n'utilisa néanmoins ni Délimitants pour l'agrégation, ni constitutifs pour l'égalité ! Ainsi nous offre-t-elle aujourd'hui un aspect hybride très spécifique, un peu archaïque, à la texture semi-rhétorique, proche, semble-t-il, de ce que Nesselmann décrivait comme syncopée, bien différente en tous cas de la facture quasi-moderne de la *Géométrie.* Nous en donnons en annexe un *fac simile*, extrait du *De emendatione aequationum* [31].

7.6. Après Viète : les Clés d'interprétation.

A découvrir ainsi les avantages considérables du système de Viète, on aurait pu s'attendre à voir s'imposer, au début du XVIIe siècle, un jeu universel de Lettres, par voyelles et consonnes majuscules, à la manière des signes divers précédemment introduits et adoptés. Il n'en fut cependant jamais ainsi. En premier lieu, les successeurs de Viète, tout en en conservant le principe, mirent en place des catégorisations différentes. Descartes (Cf. chapitre 9), utilisa

29 *La question de la "chose". Mathématiques et écriture symbolique.* op. cit.
30 Par la constitution, à partir de 1872, du corps des nombres réels, du fait de Cantor et Dedekind.
31 Publié dans les *Opera mathematica* de 1646.

à nouveau des lettres -cette fois minuscules- les premières de l'alphabet pour les données, les dernières pour les inconnues. Ni le système de Descartes, ni d'aucun des géomètres postérieurs, ne fut cependant accepté sur ce point comme universel. En première analyse, la situation était -et est encore- la suivante : à la suite de Viète, les alphabets latin et grec, deviendront le trésor des signes où puiser les Lettres, pour représenter le Donné indéterminé ou l'Inconnu. Par contre, le support de la distinction entre ces deux catégories ne se stabilisera jamais de façon définitive, pour varier d'un auteur à l'autre, d'un texte à l'autre, en une notable différence avec toutes les innovations symboliques jusqu'ici examinées.

Analysant ce point, à première vue surprenant, on découvre d'abord que ce refus d'une codification universelle se trouva toujours un support dans une absence corrélative de différence syntaxique combinatoire entre les deux types de lettres. La division entre voyelles et consonnes, par exemple, si claire sur le plan de l'alphabet, c'est-à-dire de la matérialité des signes, ne reçut jamais aucun ancrage combinatoire, les unes comme les autres venant en effet, de façon interchangeable, occuper les places ouvertes créées par les assembleurs. Voyelles et consonnes se distinguent certes sur le plan alphabétique, aussi par leurs interprétations chez Viète, mais demeurent indifférenciées quant à leur syntaxe combinatoire, une situation qu'on constate chez Descartes et dans tous les systèmes qui suivirent.

Faute de convention de distinction universelle, le lecteur devait utiliser des indications rhétoriques nécessairement apportées par l'auteur, spécifiant quelles Lettres devaient être interprétées comme Donné indéterminé, quelles autres comme Inconnu. Une procédure de catégorisation littérale *spécieuse*, au sens de Viète (*i.e* quelles lettres représentant quelles espèces [32]), que nous désignerons dans la suite sous le terme de Clé (d'interprétation). Toute Clé se se constituait donc, relativement à un texte donné, à la fois par un choix entre deux types de lettres dans l'alphabet et aussi par l'affectation à chacun d'eux de l'une de ces deux significations : inconnu ou Donné indéterminé, la profession de foi initiale de Viète en étant un parfait modèle. Les fonctions combinatoires des deux types de signes étant identiques comme on a vu, le déchiffrage du texte symbolique ne requérait pour sa part aucune catégorisation, qui était par contre indispensable au moment de l'interprétation.

150

32 Viète avait distingué la (ou le) Logistique Numéreuse, de la Spécieuse, ou Spécifique introduite par ses soins, et qui traitait des "espèces", représentées par des lettres : "Le Logistique Numérique est celuy qui est exhibé et traité par les nomnbres, le Spécifique par espèces ou formes des choses : comme par les lettres de l'Alphabet." *Isagoge*, op. cit, 30. Chapitre III.

Après Viète donc, une Clé devait être en principe attachée à chaque texte symbolique. Elle véhiculait alors, par un mouvement naturel, d'abord une *quantification*, puis une *procédure* spécifique, en un schéma que nous détaillons. Déclarer par exemple que a et b seront des signes de Donné indéterminé, cependant que x sera, dans le même texte, un signe d'Inconnu, entraîne aussitôt en effet ces diverses lettres à être interprétées comme substances, auxquelles seront respectivement associés "tout" et "quelques". Selon cette Clé, la propositionnelle :

$$(a+b)^3 = a^3 + 3\,a^2\,b + 3\,a\,b^2 + b^3$$

sera interprétée comme une propriété à établir pour *toutes* les valeurs des grandeurs données a et b. Une conclusion qui ne pouvait cependant provenir du combinatoire, mais résultait de la seule Clé. Ainsi, également, d'un canon, proposition regardée comme universellement vraie, c'est-à-dire pour "toutes" les valeurs attribuées aux Lettres, et qui fut le premier exemple historique de la question du mode, universel ou existentiel, avec lequel était posée la véracité d'une proposition mathématique symboliquement écrite.

D'un autre côté, la considération chez Descartes, dans la *Géométrie*, de la propositionnelle [33] :

$$x^3 - 9\,x\,x + 26\,x - 24 \propto 0$$

indiquait non pas une propriété universelle, valable pour toutes les valeurs d'une grandeur inconnue de signe x, mais qu'il y avait une inconnue représentée par x, dont il fallait rechercher les "quelques" valeurs, si elles existent, telles que soit valide l'équation. Ces deux exemples montrent bien le fonctionnement du Schéma : la Clé spécifie la quantification, qui implique à son tour naturellement le mode, universel ou existentiel, de la procédure mathématique ultérieure.

Cette pratique, cohérente et naturelle, de l'interprétation de l'écriture symbolique, par Clé unique et Schéma induit, apparut un temps comme une solution définitive à la codification du Donné et du Requis. Bien souvent cependant, après Viète, elle ne fut pas appliquée. Parmi ses successeurs immédiats, tous ceux qui utilisèrent son système, et en premier lieu Descartes, décidèrent parfois de renoncer à une interprétation catégorique à l'intérieur d'un même texte, dérogeant ainsi à une unicité qui faisait pourtant intrinsèquement partie de la démarche. Nous prendrons deux exemples chez Descartes, et d'abord une de ces questions mathématiques anciennes réapparues au début du XVII^e siècle, 151

33 A.T,VI, 445.

intégralement reformulées avec les ressources nouvelles de l'écriture symbolique : ce très simple exemple tiré de la *Géométrie*, de l'équation (F) du second degré.

$$y\,y = a\,y - b\,b \qquad \text{(F)}$$

Une Clé naturelle y interprétera *a* et *b* comme signes de constantes et *y* comme signe d'inconnue. Parmi les équations du second degré, l'équation proposée devra alors être considérée comme "la plus générale", *a* et *b* étant susceptibles d'y représenter des grandeurs à la valeur quelconque (donnée). En premier lieu, se trouve ainsi écrit un archétype des équations du second degré, opération symboliquement impossible avant Viète. La Clé conduit ensuite à considérer, pour tous les nombres de signes *a* et *b*, les quelques nombres de signe *y* satisfaisant (F), donc à résoudre l'équation, et obtenir le canon :

$$y = \frac{a + \sqrt{a.\,a - 4\,b.\,b}}{2}$$

déjà analysé en 5.4, avec cette conclusion : la mise sous forme symbolique de la résolution d'une question dont le fond était connu depuis l'antiquité.

A propos de cette même équation cependant -avec des notations différentes et un peu plus complexes- Descartes s'interroge plus loin sur le point de savoir à quelle condition (F) n'admet qu'une seule racine [34]. La question de Descartes doit ainsi se comprendre : que dire des valeurs des *données*, de signes *a* et *b*, pour que l'équation ne possède qu'une racine inconnue ? Si, dans les préoccupations cartésiennes, la question est très naturelle (Descartes cherche à écrire qu'une droite, étant tangente à une ellipse, ne la rencontre qu'en un seul point), elle implique pourtant *ipso facto* la recherche de valeurs de grandeurs (de signes *a* et *b*), jusques là considérées comme des données, et désormais recherchées comme inconnues. Un questionnement inconcevable pour Viète dont le système se soutenait de l'unicité d'une catégorisation à l'intérieur d'un même texte en même temps que de la division intangible qu'ainsi elle entretenait. Le renversement de position est toutefois incontestable chez Descartes, dont la solution est bien simple [35] : pour que l'équation (F) n'admette qu'une seule solution, dit-il, il faut et il suffit qu'il existe e tel que (F) se mette sous la forme :

34 A.T, VI, 414 - 415. En termes modernes, Descartes écrit qu'une droite est tangente à une courbe du second degré, parce qu'elle n'admet avec elle qu'un seul point d'intersection.

35 A.T, VI, 418-419.

$$(y - e)\,(y - e) = 0,$$

c'est-à-dire :

$$y\,y - 2\,e\,y + e\,e = 0, \text{ ou } y\,y = 2\,e\,y - e\,e$$

d'où en identifiant :

$$2\,e = a \text{ et } e.\,e = b.\,b$$

Eliminant $e = \frac{a}{2}$, puis remplaçant dans la deuxième équation , *a* et *b* doivent donc être tels que : $\frac{a\,a}{4} = b\,b$ [36]

La condition (G) fournit alors la réponse : les nombres de signes *a* et *b* doivent être tels que le carré du nombre de signe *b* soit égal au carré de celui de signe *a*, divisé par l'entier de signe 4. On voit sur cet exemple simple -dont le principe était connu depuis Euclide- à quel point le schéma de catégorisation unique, à la façon de Viète, ne pouvait durablement s'appliquer. Dans la première Clé, les Lettres *a* et *b* avaient été considérées comme les signes de données arbitraires, auxquelles était associée une quantification universelle ("toutes"), ceci impliquant que l'équation considérée était l'archétype du second degré. De son côté, *y* devait être interprété comme Requis inconnu. La seconde Clé est au contraire venue requalifier *a* et *b* comme signes de Requis inconnu, le texte même de la résolution leur associant une quantification existentielle ("quelques" : *a* et *b* doivent être *tels que*...). On pourrait ici continuer : dans la condition (G) elle-même, il pourra être très simplement possible d'introduire ultérieurement encore une nouvelle Clé, considérant cette fois b comme donnée et a comme signe d'inconnue, ce qui conduira à un nouveau canon [37]

$$a = 2\,b$$

Ces procédures, incompatibles avec la pratique de Viète, ne furent nullement un exemple isolé, mais au contraire suivies par nombre d'autres, plus éclairantes encore. Ainsi, plus loin dans la *Géométrie*, Descartes associe-t-il à la solution du problème de Pappus [38] la propositionnelle :

$$y\,y \propto 2\,y - x\,y + 5\,x - x\,x$$

Plusieurs catégorisations sont ici *a priori* possibles : on peut considérer que l'inconnue a pour signe *y* et que *x* représente une donnée, ce qui induira une interprétation universelle (respectivement existentielle) par rapport à la quantité de signe x

36 L'élision du Point, comme signe de la multiplication, est usuelle chez Descartes.
37 En supposant toutes les grandeurs positives.
38 A.T, VI, 405.

(respectivement y). On peut considérer au contraire que l'inconnue a pour signe x et que y est un signe de donnée. Ou bien que x et y sont tous deux des signes d'inconnues, conduisant à une modalité purement existentielle. Comment dans ce dernier cas interpréter la forme? Le choix entre ces Clés, toutes trois valides, ne pouvait en tous cas venir de l'examen de la propositionnelle, et dépendra, en fait, des époques et des auteurs. Si nous avons aujourd'hui tendance à considérer la troisième comme la plus naturelle (elle s'analyse en termes relationnels), il n'en fut aucunement ainsi pour Descartes, qui utilisa au contraire les deux premières, *successivement* et *dans le même texte* : soit pour tout x fixé, à considérer une équation du second degré en y. Soit, pour tout y fixé, Descartes exhibant alors une (autre) équation du second degré en x.. Dans chaque cas, il chercha, non pas à calculer les solutions, mais à les construire géométriquement. Pour surprenante qu'elle parût aux contemporains, la méthode était en vérité co-extensive à l'usage que Descartes voulait faire de ses résultats. Nous avons ailleurs plus longuement analysé [39] cette particulière procédure, dite aujourd'hui recherche des racines d'équations algébriques associées à des applications partielles.

Cet exemple démontrait comment deux Clés d'interprétations, distinctes et opposées, pouvaient simplement se succéder sur une même forme combinatoire, par échange des significations des Lettres entre Donné indéterminé et Requis inconnu, un exemple qui vient donc ruiner la prétention à l'unicité, dans un même contexte, de toute catégorisation littérale. Il ne s'agit pas ici de différence de contexte, mais d'un même auteur dans un même texte. L'unicité aurait certes pu être imposée, au prix cependant de l'abandon de la faculté -complètement utilisée, pour la première fois dans l'histoire, par Descartes dans notre second exemple- de changer d'interprétation à l'intérieur d'un même texte, tout en conservant la même propositionnelle, selon le regard que le géomètre portera sur elle. On a déjà observé qu'il n'avait pas été possible de construire de frontière combinatoire véritable entre les Lettres de l'un ou l'autre type, les signes étant formellement employés exactement de la même façon ; cette interchangeabilité combinatoire "aveugle" aura ainsi permis notre changement de Clés observé chez Descartes. Ainsi généralement autorisé par la neutralité de la structure combinatoire au regard des significations, le multiple regard du géomètre, mathématiquement fécond, devint ensuite indispensable. Ainsi, dès la *Géométrie* de 1637, se trouva dans les faits posée la question de la Clé, et de son éventuelle représentation, donc de celle de la quantification.

39 SERFATI, *Compas*, op. cit. Voir aussi BOS, *Structure...*, op. cit.

Dans les quarante années qui séparent l'*Isagoge* de la *Géométrie* s'élabora alors cette conclusion de fait : les Clés à la façon de Viète devaient recevoir un caractère essentiellement provisoire et local, elles qui pouvaient (et parfois, en un certain sens, devaient) être révoquées dans un même contexte; il était en vérité dans la nature des choses mathématiques que, pas plus que leurs représentations, le Requis inconnu et le Donné indéterminé ne devaient être séparés de façon définitive dans un même contexte. La *Géométrie* est ainsi le premier des grands textes mathématiques qui utilise à la fois pleinement le système de Viète de représentation du Donné, en même temps qu'il en annule toutes les prétentions à l'universalité. Semblable changement de position, qui découle à l'évidence de l'examen du texte, n'aura cependant aucunement été souligné par Descartes lui-même.

Après Descartes, aucun géomètre conséquent ne voulut se priver de la faculté de pouvoir, à un moment donné du texte, rechercher, comme inconnues, des grandeurs jusqu'alors considérées comme fixées, dès lors qu'elles étaient arbitraires. En termes d'interprétation, cette faculté ouverte se traduisit comme échange des significations des Lettres, conduisant ainsi à des investigations neuves sur un même support symbolique. A l'intérieur d'un même texte pouvaient donc coexister des conventions d'interprétation contraires quant aux Lettres : on comprend rétrospectivement, mieux pourquoi n'avait été viable aucune convention universelle, gouvernant tous les textes possibles. Toute Lettre interprétée comme Donné indéterminé, à un moment du texte, pourra ultérieurement être considérée comme Requis Inconnu, et recherché comme tel. Nous donnons maintenant, chez Leibniz, deux exemples de la façon dont cette question était unanimement reçue à la fin du XVII^e^ siècle.

Le premier est un extrait du *Monitum De Characteribus Algebraicis* [40]. Ce texte, d'une particulière clarté, fournit un exemple de Clé explicite : a, b sont signes de quantités connues et x, y, ceux de quantités inconnues. Leibniz, cependant, prend bien soin de souligner l'arbitraire de la Clé, qui pourra être simplement annulée; la seule distinction qui demeure en fait, sera celle-ci : les lettres minuscules -quel qu'en soit le type- devront toujours être interprétées comme des indéterminées, cependant que les majuscules seront la représentation de points géométriques sur une figure. Encore Leibniz prend-il soin de préciser *in fine* que même cette dernière divison -elle aussi arbitraire- pourra être à son tour révoquée et inversée.

40 M.S, V, 218.

"Literae minusculae a, b, x, y solent significare magnitudines, vel quod idem numeros indeterminatos; majusculae vero, ut A, B, X, Y, puncta figurarum; ita a b significat factum ex a in b, sed AB rectam a puncto A ad punctum B ductam. Huic tamen observationi adeo alligati non sumus, ut non aliquando minusculas pro punctis, majusculas pro numeris vel magnitudinibus usurpemus, quod facile apparebit ex modo adhibendi. Solent etiam literae priores ut a, b, pro quantitatibus cognitis vel saltem determinatis adhiberi, ut x, y, pro incognitis vel saltem pro variantibus."

Notre second texte, plus clair encore peut-être, est extrait de l'article célèbre [41] qui voit Leibniz inventer la théorie des enveloppes (d'une famille de courbes planes à un paramètre). Leibniz y explique une nouvelle fois le principe des Clés d'interprétation et, en même temps, dit-il, l'absolue nécessité en l'espèce, d'en changer. D'un côté dit-il, il y a des paramètres [42] ou constantes [43], qu'on a l'habitude de désigner par *a* et *b*. Elles sont alors indifférentiables [44]. Et il y a des coordonnées, telles l'abscisse ou l'ordonnée [45], qui sont entre elles liées [46], et donc différentiables [47] et qu'on a l'habitude de désigner par *x* et *y*. Dans d'autres cas cependant, ces mêmes paramètres doivent être considérés comme liés et peuvent donc être différentiés. C'est très précisément dire qu'il a inversé les Clés. Il reste à Leibniz à tenter d'exhiber naïvement une catégorie de super-constantes (*constantissima*) qui sont censées ne plus pouvoir être différentiées.

---

41 *De Linea ex lineis numero infinitis ordinatim ductis inter se currentibus formata easque omnes tangente, ac de novo in ea re analyseos infinitorum usu.* (MS, V, 266- 269 = Acta Eruditorum, Avril 1692).

En termes modernes, étant donnée une famille C_λ de courbes à un paramètre, d'équation f (x, y, λ) = 0, de classe C^1, le procédé leibnizien consiste à considérer initialement λ comme fixé et à différentier l'équation par rapport à x (x est donc variable; λ est arbitraire mais fixé). Leibniz trouve ainsi la tangente au point d'abscisse x à la courbe de paramètre λ. En inversant les points de vue, c'est-à-dire en différentiant la même équation cette fois par rapport à λ (x est cette fois arbitraire, mais fixé), Leibniz montre comment alors obtenir l'équation de l'*enveloppe* de la famille. La seconde différentiation conduit en effet à g (x, y, λ) = 0, qu'on peut considérer comme l'équation d'une autre famille à un paramètre D λ : pour chaque λ fixé, l'intersection C λ et D λ, si elle existe, donne le point caractéristique de l'enveloppe, dont on obtient ainsi une paramétrisation.

156

42 *Parametri.* page 268.

43 En fait des grandeurs constantes : rectae magnitudinae *constantes.* Idem.

44 *Indifferentiabiles.* Idem.

45 *Coordinatas, abscissa, ordinata.* Idem.

46 *Gemina.* Idem.

47 *Differentiabiles.* Idem.

Des exemples simples, d'une autre nature, tirés de la structure des canons, vinrent aussi démontrer qu'en sens inverse ce qui était considéré comme requis inconnu pouvait être localement regardé comme donné indéterminé. Si la formule de résolution de Viète (Cf. 7.5.1)

$$x = \frac{D - B}{2}$$

permet en effet de calculer *in fine* le requis en fonction du donné, sa résolution, autorise aussi bien, en sens inverse, l'expression du donné en fonction du requis, suivant :

$$D = 2\,x + B.$$

Après Viète et Descartes donc, la situation devint celle-ci, aujourd'hui encore en vigueur : chaque texte symbolique sera usuellement l'objet de Clés diverses, chacune présentant une bi-répartition entre les Lettres et portant distribution corrélative de deux significations : Donné indéterminé et Requis inconnu. Chaque Clé véhicule ainsi son Schéma de signification : quantification (quelques - tout) et procédure modale (existentielle - universelle). Le modèle simple le plus fréquent est celui où une seule Clé gouverne tout le texte, ainsi interprété selon une même grille. Fréquemment aussi cependant, des Clés diverses sont dans les faits successivement proposées par l'auteur -souvent implicitement- impliquant, entre deux Clés, des interprétations contraires des Lettres. Comme on a vu chez Descartes, semblable juxtaposition de Clés trouve une source nécessaire dans la nature mutiple des questions ainsi soulevées sur un même support symbolique, chaque Schéma de signification permettant alors de poser et résoudre des questions inaccessibles autrement, c'est-à-dire selon le Schéma d'une autre Clé.

Cette question majeure des Clés demeura en ce même état rhétorique jusqu'au milieu du XIX[e] siècle. Elle fut alors reprise, d'abord autour de 1850, par des mathématiciens anglais, Bentham et de Morgan en particulier (sous le nom de quantification du prédicat), puis à la fin du siècle par Peirce, enfin et surtout par Frege. Comme on sait, la pratique actuelle en est à nouveau une symbolisation, au moyen cependant de signes spécifiques nouveaux, venant préfixer les propositionnelles. Ainsi, sur notre même Forme *supra* de la *Géométrie*, les deux Clés cartésiennes ci-dessus seraient -elles aujourd'hui représentées :

$$(\forall x)\,(\exists y)\; y\,y \propto 2\,y - x\,y + 5\,x - x\,x$$
$$(\forall y)\,(\exists x)\; y\,y \propto 2\,y - x\,y + 5\,x - x\,x$$

7.7. Texte symbolique et ontologies.

Qu'il n'ait été ni souhaitable, ni même parfois possible, de fixer aux Lettres, dans un même texte, une Clé unique, fut un fait à première vue surprenant, mais qui ne manqua pas de détruire, entre le symbolique et le rhétorique, l'image d'une liaison univoque rigide telle qu'on pourrait par exemple décrire par une traduction avec lexique. Cette première brèche, ainsi librement consentie dans l'univocité de la représentation, s'accompagna mécaniquement d'une forme inattendue de prééminence du registre combinatoire. Devant ce découplement entre texte symbolique et interprétation rhétorique, ce qui demeura en effet permanent, ce fut bien le symbolique, pôle et support des diverses interprétations, présentes ou à venir. En vérité, dégagée de toute prétendue obligation statutaire de rapport exclusif à une seule signification, dont elle n'aurait été en somme que l'incarnation en signes, l'écriture symbolique continua de gagner en autonomie, c'est-à-dire en existence propre. Dans cette relation croisée entre le signe et la signification, nous avions déjà noté à quel point la visée initiale du géomètre, une fois exprimée en termes symboliques, avait pu se trouver largement dépassée en extension, l'enchevêtrement des instructions composées étant ici un exemple éclairant. La représentation de l'Indéterminé cependant, fit porter ses conclusions sur un tout autre registre, et découpa la première brèche véritable dans le dogme de l'univocité de l'interprétation des Formes, ouvrant en conséquence la voie à une forme d'ontologie séparée, autonome, catégorématique, des éléments symboliques, assemblages, Formes, ou propositionnelles.

7 8. Géométrie et calcul, après Viète.

En géométrie, avant et après Viète, fonctions et usages respectifs de la figure et du texte rhétorique restèrent ce qu'ils étaient, la figure demeurant un lieu de la représentation du discours rhétorique par le moyen de signes spécifiques : lignes, plans ou cercles.

Dans le calcul après Viète, la catégorie du Requis resta aussi ce qu'elle était, désormais représentée par des Lettres seulement. Celle du Donné, par contre, se cliva entre Donné déterminé et Donné indéterminé, tout comme en géométrie. Contrairement au déterminé, la valeur du Donné indéterminé n'était pas effectivement connue de tous. Ce qui, à partir de sa représentation, était par contre universellement reconnu, c'est une même substance à la valeur arbitraire. Après Viète donc, le texte symbolique se couvrit de signes
158 littéraux, à la fonction combinatoire identique à celle du Zeta (ou des Figures cossiques) pour les inconnues, mais interprétés comme Donné

indéterminé, une situation qui vaut encore aujourd'hui. La distinction entre les deux interprétations est rhétoriquement indiquée au lecteur par une Clé locale. Diverses Clés peuvent coexister sur un même texte, chacune véhiculant son propre Schéma. Dans le calcul après Viète, la résolution finale décrivit les solutions au moyen d'un canon, Forme s'interprétant en une suite d'instructions. De même qu'en géométrie, l'analyse indéterminée permit donc à son tour de dégager l'essence d'une question, tant en ce qui concerne la position du problème que sa résolution.

En un premier temps, on avait donc pu croire que Donné et Requis, les catégories initiales, s'étaient chacune scindées : Donné déterminé, Donné indéterminé d'une part, Requis inconnu, Requis déterminé (ou solution) d'autre part. De l'ensemble de notre analyse, il découle cependant que deux catégories seulement subsistèrent intégralement : le Donné déterminé représenté par des Chiffres, et le Requis déterminé, représenté par une Forme dans un canon ; que par contre, toute distinction entre Requis indéterminé et Donné indéterminé n'aura pu être qu'essentiellement locale, objet de catégorisations susceptibles d'être révoquées dans un même contexte. A la place du Donné indéterminé et du Requis indéterminé, aura ainsi subsisté un seul méta-concept, l'Indéterminé, dont le mérite ultime de Viète aura sans doute été d'assurer la création. Ce que constate justement Descartes, le premier des grands mathématiciens à véritablement utiliser le système de Viète :

> "Sans considérer aucune différence entre ces lignes inconnues ou inconnues (...)" [48]

Cette institutionalisation de l'Indéterminé, sera ultérieurement élargie par Newton et Leibniz, de façon remarquable et inattendue, par modification de son objet, en passant des quantités aux équations. De même, remarque en effet Leibniz, que les algébristes anciens avaient représenté les quantités recherchées par des lettres valant pour Indéterminé, de même on est désormais en mesure de représenter par des équations à coefficients indéterminés les équations des courbes que l'on recherche :

> "Cum igitur antea Algebraistae assumerent literas seu numeros generales pro quantitatibus quaesitis, ego in talibus problematibus transcendentibus assumsi aequationes generales seu indefinitas pro lineis quaesita mihi est
> $0= a + b x + c y + e x y + f x x + g y y$ etc..." [49].

48 A.T, VI, 372.
49 *De Geometria Recondita et Analysi Indivisibilium Atque Infinitorum,* M.S., V, 229 = A.E, 1686).

Si le procédé qu'évoque Leibniz, aujourd'hui appelé méthode des coefficients indéterminés, avait été incontestablement mis à jour par Newton avant lui, la remarque d'emploi, épistémologiquement essentielle, aura été, comme il arrive souvent, le fait du seul Leibniz. La méthode, aujourd'hui couramment employée, connut un formidable développement à la fin du XVII[e] siècle, avec par exemple la recherche de sommes de séries entières indéterminées satisfaisant à des équations différentielles. La création par Viète de l'Indéterminé se sera ainsi constituée en une méta-procédure, susceptible de s'appliquer à des situations encore nouvelles.

7.9. Formes et objets.

7.9.1 Interprétations primaires. Clés en général.

Dans cette section, nous faisons retour sur les significations apportées aux assemblages et aux Formes, pour en donner une description plus théorique, au moyen de ce que nous appellerons l'objet mathématique d'une Forme renseignée. Une question qui ne relève pas du seul registre combinatoire, mais que nous avons abordée ci-dessus, dans chaque chapitre, sous le nom de "résultat" d'une suite d'instructions. Nous dégageons ici, par ordre de complexité croissante, quatre étapes successives, cruciales sur le plan des interprétations : d'abord le cas de la logistique numéreuse, puis celui de l'interprétation d'une Lettre seule, d'une Forme élémentaire ensuite, d'une Forme composée quelconque enfin.

Revenons d'abord à nos conclusions provisoires aux chapitres 3 et 4 sur l'assemblage élémentaire :

$$2 + 3{,}17$$

Les Chiffres 2 et 3,17 sont usuellement interprétés comme valeurs de nombres, et la Croix comme addition. L'assemblage lui-même est alors à son tour interprété selon cette procédure spécifiée : ajouter le nombre de signe 2 au nombre de signe 3,17. D'un autre côté, la Forme elle-même, c'est-à-dire :

$$(2 + 3{,}17)$$

160 représente un "certain nombre" dont la valeur, qui a pour signe 5,17, est le résultat de la procédure.

Dans ce qu'en première analyse, nous avons jusqu'ici appelé résultat, il convient cependant d'opérer une distinction essentielle, entre nature et valeur. La nature du résultat est en première analyse celle d'une espèce mathématique, ici celle de nombre. Sur ce point et jusqu'au XVI^e siècle, cette possible nature, qu'on appellera aussi son champ, ne fit guère l'objet de controverses : sans que le terme ait à l'époque fait l'objet d'une véritable définition, encore moins d'un inventaire, comme Leibniz en dressera, le premier, dans les *Nouveaux Essais* [50], c'était dans tous les cas ce que le géomètre du temps appelait un "nombre"; la seule division alors opératoire distinguait simplement entre nombre "en général" et "nombre entier". Quant à la valeur du résultat, c'est tout simplement la substance propre, individuelle, du nombre concerné. A cet égard, notre exemple est véritablement très simple, d'abord parce qu'il concerne une Forme de niveau un, ensuite parce qu'on l'a emprunté à la Logistique numéreuse, où toute Forme est interprétée comme la substance particulière et explicite d'un nombre, lui-même obtenu par l'achèvement d'une procédure minutieusement décrite par l'assemblage intérieur à la Forme, cette procédure constituant en quelque sorte l'historique de l'obtention de la substance [51].

La fin du XVI^e siècle, l'oeuvre de Viète et l'avènement de l'Indéterminé, amenèrent un changement important. L'interprétation d'une Lettre isolée comme

$$a$$

était celle-ci: une certaine grandeur, de signe a possède une valeur donnée, au demeurant indéterminée, qui demeure cependant permanente dans un contexte. Une interprétation

50 II, Chapitre XVI, §4 = P., 5,142. La définition de Leibniz est étonnamment proche de ce que nous appelons aujourd'hui nombre "réel", une terminologie qui s'étendra à fonction "réelle", ou encore polynôme "réel."

51 Observons enfin aussi la modification nécessaire de notre terminologie : simplement dire que : "la substance de a est un nombre" aurait été ambigu. Et pour distinguer en effet entre "nombre" en tant que concept, et "un nombre déterminé" qui en est l'une des réalisations, nous avons dû, pour être précis, ajouter le préfixe adjectif quantificateur "un certain". Nos énoncés s'en trouveront ainsi plus rigoureux, mais plus embarrassés aussi. Cette remarque, profondément anachronique au XVII^e siècle, mais qui se trouve par contre en bonne place chez Frege (in *Que la science justifie le recours à une idéographie)* est à l'origine de l'écriture symbolique de la quantification existentielle.

Voici Frege sur ce point : "Toutefois le langage se révèle défectueux lorsqu'il s'agit de prévenir les fautes de pensée. Il ne satisfait pas à la condition ici primordiale, celle d'univocité. Les cas les plus dangereux sont ceux où les significations des mots différent très peu, où les variations sont légères bien que non équivalentes. Parmi de nombreux exemples on citera un cas typique fort commun : c'est le même mot qui sert à désigner un concept et un objet particulier tombant sous ce concept; de manière générale aucune différence n'est marquée entre le concept et l'objet particulier. "Le cheval" peut désigner un individu mais aussi bien toute l'espèce, comme dans la proposition "le cheval est un herbivore"; et cheval peut enfin avoir le sens d'un concept comme dans la proposition "ceci est un cheval". "Extrait de *Que la science justifie le recours à une idéographie*. Publié dans le *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (1882) Traduit dans IMBERT C, *Ecrits logiques...*, op.cit, 64. 161

que nous caractériserons désormais par le terme de substance. Cette substance, qui ne pouvait donc être, aux XVIe et XVIIe siècles, que la valeur d'un nombre (un "certain nombre"), se définira ultérieurement, extensivement, par la caractérisation d'un individu dans une espèce mathématique donnée. Avec le temps en effet, la possible nature de l'espèce s'étendit largement au-delà des nombres, même après que ceux-ci aient été répartis en diverses et vastes catégories. Peu à peu, à partir du début du XVIIe siècle, la collection des espèces auxquelles les géomètres purent consacrer la signification d'une Lettre comme a, s'élargit de façon remarquable : quantités imaginaires, polynômes, fonctions, sous-groupes, applications linéaires, espaces métriques compacts, distributions tempérées, ultrafiltres convergents, etc..., toutes entités que nous n'analyserons évidemment pas ici : nous dirons seulement qu'elles sont, en général, des espèces mathématiques : ce qui remplaça donc, dans l'interprétation, la "valeur du nombre" fut la spécificité d'un certain individu dans l'espèce considérée, c'est-à-dire, en dernière analyse, l'ensemble de ses différences par rapport aux autres individus de la même espèce. Ainsi, de la substance de telle application linéaire par exemple, ou de tel espace métrique.

D'un autre côté, nous avons longuement analysé *supra* la dialectique de l'Indéterminé, qui apparut à ce moment comme coextensive à la procédure d'interprétation. Cette substance en effet, ayant pour signe la Lettre a, était certes permanente, mais aussi arbitraire.

Notre troisième étape traite des Formes élémentaires. Considérons l'exemple :

$$(a + 3)$$

Pour lui fournir une signification, il faudra d'abord impérativement interpréter le Chiffre 3 et la Croix ; ce seront respectivement le plus souvent, la valeur d'un certain entier, et le signe de l'addition de nombres ; ensuite la Lettre a, comme valeur indéterminée d'un nombre. L'interprétation corrélative de l'assemblage :

$$a + 3$$

162 sera alors cette procédure opératoire : "Ajouter le nombre de signe 3 à la valeur indéterminée du nombre de signe a". La procédure est donc ici constituée d'une seule instruction, celle-ci faisant nécessairement intervenir les significations déjà apportées à tous les signes présents, en particulier à une Lettre comme a. Toute

PAR SUITE D'UNE ERREUR DE MA PART, LES PAGES 163 et 164 SONT VIRTUELLES.

procédure implique donc les significations de toutes les Lettres exposées. Quant à l'interprétation de la Forme elle-même, c'est-à-dire:

$$(a + 3)$$

ce sera ce nous avons appelé *supra* la "valeur du résultat", c'est-à-dire sa substance propre. Cette substance n'est cependant pas numériquement explicitable comme dans l'exemple premier, en Logistique numéreuse; elle n'est pas davantage indéterminée comme dans le second. Elle demeure cependant permanente dans un même contexte, parce que construite, au moyen d'une procédure spécifiée, à partir de la Lettre a, qui a été, elle, interprétée comme arbitraire mais fixée. En définitive, la substance n'est rien d'autre que le résultat, unique et permanent, de la procédure. Les mêmes conclusions vaudront évidemment pour des Formes comme

$$(2 + x)$$

où x est le signe d'un nombre inconnu. Prenons enfin pour dernier exemple une Forme composée, pourvue d'un jeu d'interprétations de tous les signes présents, et examinons, dans ces conditions, sa substance et la procédure associées. Prenons l'assemblage PHI de niveau quatre :

$$a + b.\,x + c.x^2 \qquad \text{PHI}$$

dûment complété selon la Forme (PHI) :

$$(\,a + (\,(\,b\,.\,x) + (c.\,(\,x^2)\,)\,)\,) \qquad \text{(PHI)}$$

Les Lettres a, b, et c seront usuellement interprétées par des nombres donnés indéterminés, et x par un nombre requis inconnu, les assembleurs Point et Croix comme signes opératoires, respectivement d'addition et de multiplication de nombres ; l'assemblage complet sera ainsi la représentation de cette procédure détaillée :

> "Elever au carré le nombre requis inconnu de signe x. Multiplier le résultat par le nombre indéterminé de signe c. Ce second résultat est un certain nombre, qui est la substance de l'objet de la Forme interprétée :
>
> $$(c.\,(x^2)$$
>
> D'un autre côté, multiplier entre eux les nombres de signes x et b, respectivement requis inconnu et donné indéterminé. On obtient un troisième résultat, pareillement un certain nombre. Ajouter entre eux les second et troisième résultats. On obtient un quatrième résultat qui est encore un certain nombre. Ajouter à ce dernier le nombre indéterminé de signe a."

Ceci clôt la procédure, qui a donc fait intervenir substances et procédures intermédiaires : elles seront dites, selon le cas, de niveau un, deux, ou trois. On obtient ainsi un cinquième et dernier résultat, qui est encore pourvu d'une substance : un certain nombre. Comme au stade précédent, cette substance n'est ni numériquement explicitable, ni indéterminée. Elle est seulement entièrement spécifiée par le fait d'être le résultat de la procédure : par l'assemblage qu'elle contient à son intérieur, toute Forme, en effet, garde trace et histoire de la procédure d'obtention de la substance. D'une part donc, celle-ci existe, c'est-à-dire qu'une essence persiste dans un contexte. D'autre part, elle pourra être ultérieurement manipulée comme telle dans des calculs qui, au moyen des Délimitants les plus extérieurs, l'utiliseront comme un agrégat constitué, comme dans l'exemple :

$$3. (a + b. x + c.x^2) + 2. - 7$$

Etant donnée une Forme quelconque, nous commencerons donc par interpréter tous les signes qui y figurent : Chiffres, comme valeurs de nombres le plus souvent [52], Lettres comme substances, inconnues ou indéterminées, de certaines espèces mathématiques, assembleurs enfin, comme signes d'opérations. Et ce jeu de significations, dites primaires, sera encore appelé une Clé d'interprétation. Le cas de l'affectation, comme significations, du Donné et du Requis, traité *supra* en 7.6, en apparaît rétrospectivement, en effet, comme un cas particulier simple. Et on releva à ce propos ce qu'on avait ailleurs partout observé : si l'univocité des significations primaires fut la règle jusqu'au milieu du XVII^e siècle, la situation changea radicalement à partir de la fin de ce même siècle, avec l'emploi nécessaire de Clés diversifiées [53]. Aujourd'hui, les significations primaires sont diverses et contingentes (cf. *infra*, l'exemple de $x^3 = 1$).

166

---

52 On a décrit en 3.7 comment des Chiffres purs, tel 3, furent interprétés par Leibniz comme la position d'une certaine inconnue et/ou d'une certaine équation parmi d'autres. Une symbolisation qui était cependant inadéquate, à la manière cossique : elle ne représentait pas en effet le prédicat substantiel. Prolongeant avec succès l'idée originelle de Leibniz, la notation indicielle, aujourd'hui universellement répandue, utilise des Chiffres purs interprétés comme indication de la position. Le premier emploi véritable d'une telle symbolique indicielle sera, en 1772, le fait de A.T Van der Monde, in *Histoire de l'Académie des Sciences*. Paris. 1775, 516.

53 Cf. 7.6.

7.9.2. L'objet d'une Forme renseignée.

Ainsi pourvue d'une Clé primaire, une Forme sera dite renseignée : nous considèrerons en effet qu'elle est alors préalablement équipée de façon adéquate, en vue de la production de significations [54]. Le renseignement d'une Forme est ainsi une modalité de sa pré-interprétation, l'interprétation définitive, si elle est possible, venant à l'issue de la procédure. Nous associerons alors à toute Forme renseignée, le couple de ces deux concepts : sa procédure et sa substance; un couple que nous appellerons l'objet (mathématique) de la Forme renseignée. Un tel objet est donc strictement défini par la conjonction de deux prédicats, dépendant autant du détail de la structure combinatoire de la Forme que des significations primaires, apportées de façon contingente. Se trouvent alors constitués, à propos d'une Forme renseignée arbitraire, quel qu'en soit le niveau, d'une part la substance de l'objet -ce que nous avions primitivement appelé "le résultat de la procédure"-, c'est-à-dire un individu spécifié dans une espèce mathématique; d'autre part la procédure elle-même. Se dégageant des significations primaires, la procédure s'organise alors en une suite d'instructions qui voit son déroulement réglé par la hiérarchie des signes de délimitations, décrivant ainsi l'arborescence combinatoire [55]. De renseignée, la Forme devient alors possiblement interprétée. Dans cette perspective, la procédure de l'objet est ainsi le prolongement obligé, sur le plan signifiant, du jeu des significations primaires [56]. L'objet est donc bien un concept double : une substance et une procédure, un élément caractérisé à l'intérieur d'un certain champ, et sa procédure de désignation. En d'autres termes, un individu dans une espèce et l'histoire de son obtention.

Ainsi, il n'est pas ici d'objet mathématique en soi, mais seulement d'objet d'une Forme renseignée ; aussi dira-t-on naturellement que l'objet est l'interprétation de la Forme renseignée. Plus simplement encore, nous parlerons de l'objet de la Forme (renseignée), c'est-à-dire ce dont elle traite au fond. Toute Forme renseignée de niveau au moins égal à deux, considérée comme

---

54 L'emploi transitif du verbe renseigner indique un achèvement dans l'apport de renseignements demandés, dans le cadre d'un formulaire par exemple.

55 Cf. 5.9.

56 Cette description ne coïncide pas avec la construction qui fut ultérieurement reprise, sous forme abstraite et générale, dans l'écriture symbolique même, par la représentation fonctionnelle :

$$f\,(x)$$

où f est le signe d'une fonction, donc d'une procédure abstraite, et dont f (x) est le "résultat". Dans cette représentation symbolique et cette conception, en effet, la procédure, de signe f, ne dépend pas des objets intermédiaires, contrairement à ce que nous avons ici défini.

achevée [57] dans un contexte, sera ainsi interprétée par un objet, dit à son tour achevé. La Forme, contient cependant à son intérieur des Formes intermédiaires de niveau moindre, $(c\,.\,(x^2))$, par exemple dans la Forme *supra,* interprétées comme objets intermédiaires, dits constituants. Procédure et substance de l'objet achevé dépendront alors évidemment des procédures des objets constituants.

Prolongeant nos remarques des chapitres 4 et 5, nous mettrons alors définitivement en place une représentation symbolique double, en séparant les deux concepts. La procédure sera représentée par l'assemblage, c'est-à-dire dans l'exemple *supra*, par :

$$a + ((b.\,x) + (c.\,(x^2)))$$

et la substance, par la Forme, c'est-à-dire :

$$(a + ((b.\,x) + (c.\,(x^2))))$$

Une division que nous avions déjà esquissée ci-dessus au chapitre 5. On reconnaît ainsi la dialectique de l'Indéterminé : on retrouve en effet, d'une part un nombre réel (la substance, au moyen de la Forme même) et d'autre part une *classe* de nombres (tous ceux accessibles par la procédure de l'assemblage). Comme on voit, nous nous sommes dans tous les cas strictement interdits d'employer le terme de "variable", ambigu selon nous. Ce faisant, nous suivons à la fois la pratique de Frege et sa critique de Russell sur ce sujet [58].

Ce schéma postule implicitement que l'intégralité de l'interprétation d'une Forme renseignée est décrite par deux éléments informatifs et deux seulement : la substance et la procédure. Et certes, la prise en compte de ces deux attributs est impérativement nécessaire. On a décrit les contradictions qui, en logistique numéreuse, avaient pu naître, sur ce point, d'une confusion première entre procédure et "résultat" : il est évidemment fréquent que deux objets aient des procédures distinctes et une même substance ! D'un autre côté, on peut se demander si deux attributs sont suffisants. Il est en effet usuel, sur le plan signifiant, d'ajouter des commentaires à la procédure et la substance, en explicitant par exemple que telle

---

57 Par Forme achevée, on entendra ici que, dans le contexte considéré, celle-ci n'est pas contenue dans une forme symbolique de niveau supérieur. Elle est donc, soit autonome, soit directement incluse dans une propositionnelle.

58 Cf. LARGEAULT, J., sur le point de "La critique par Frege de la notion de variable", in *Logique et philosophie chez Frege*. Nauwelaerts. Louvain- Paris. 1970, page 105 : "Il est à remarquer que Frege s'abstient d'employer le mot de variable que le lecteur attendrait et qui semble inévitable lorsqu'on parle d'élément arbitraire pris dans un ensemble (...) Frege renonce volontairement à ce mot commode et intuitif mais qui recouvre plutôt les difficultés qu'il ne les résout."

168

équation est "algébrique sur le corps des nombres complexes, à coefficients indéterminés, de degré égal à quatre". Ces éléments d'interprétation ne devraient-ils pas, eux aussi, être fournis? En vérité, on verra ci-dessous comment ces considérations, apparemment étrangères au schéma initial, seront au contraire chaque fois simplement dérivées de Clés d'interprétation adéquates. Les termes d' "algébrique", ou de "polynôme" par exemple, relèveront de définitions ultérieures dont l'élaboration se fera sur un mode récurrent, chaque fois à l'aide des seules Clés telles qu'ici constituées. En définitive donc, deux attributs, procédure et substance, sont nécessaires et suffisants pour caractériser l'interprétation d'une Forme renseignée.

Comme on vient de le noter, il peut se faire que des procédures distinctes conduisent à des substances identiques, soit accidentellement, soit universellement. Un phénomène si usuel qu'il est à l'origine même du Calcul. Par exemple, avec des Clés numériques usuelles, les deux Formes :

$$((4.(a^2)) + ((8.(a.b)) + (b^2)))$$
et
$$((2.a + b)^2)$$

ont toujours même substance. La constatation de cette coïncidence constitue une propriété universelle, très simple canon numérique, qui serait néanmoins faux avec des interprétations matricielles des Lettres. Avec une Clé numérique "réelle", également usuelle, l'égalité de substances des Formes :

(x^4) et $((3.(x^2)) - 2)$

n'est pas une propriété universelle, mais accidentelle : une équation [59].

En terminant, nous retournons sur l'interprétation des Lettres simples, comme

a

Le signe peut être dûment complété selon

(a)

pour obtenir une Forme de niveau zéro. Ce schéma de représentation double, selon a et (a), qui peut paraître superflu à l'interprétation, est en fait absolument nécessaire à sa réintégration dans le cadre de ce concept double qu'est l'objet : comme plus haut donc, (a) sera le signe de la substance, et a celui de la procédure. Une interprétation primaire de

(a)

59 Les solutions en sont : 1 ; - 1 ; 2 ; - 2.

sera, par exemple, la valeur d'un certain nombre, substance de l'objet associé. Quant à la procédure, de signe
a

elle se résumera ici, en l'absence d'assembleurs et donc d'opérations, à être, dans le registre de l'Indéterminé, simplement celle de la désignation : "soit a le signe d'une grandeur arbitraire, mais fixée". Dans ce cas extrême d'une Lettre isolée, la procédure est donc exactement constituée d'une dénomination. Apparemment superflue, semblable double représentation, à l'effet de codifier un concept structurellement double, aurait pourtant grandement facilité la diffusion initiale du système de Viète : elle aurait en effet publiquement dénoué, au moyen de deux signes distincts, ce que nous avons appelé ci-dessus la contradiction fondatrice. Mais, en vérité, la confusion entre procédure et substance, à propos des Lettres simples, fut co-extensive au développement de l'algèbre et, aujourd'hui encore, l'écriture mathématique usuelle n'utilise sur ce point qu'une seule représentation. Quoiqu'il en soit, la dénomination apparaît ici, à l'issue de notre analyse en quatre points, comme la seule procédure possible, qui soit, épistémologiquement parlant, de niveau zéro.

On pourrait ici objecter que, par nos concepts de "procédure" et de "substance", nous n'avons fait que reprendre le doublet de Frege de "sens" et "dénotation", développé dans l'article portant ce même titre [60]. Il nous paraît pourtant important de maintenir dans cette thèse notre proposition de terminologie, qui s'applique à une conceptualisation qui ne coïncide pas en vérité avec celle de Frege, d'une part parce qu'elle concerne le seul registre mathématique, à notre sens très spécifique, d'autre part et surtout parce qu'à nos yeux, elle requiert, pour sa définition, une précision bien plus grande, particulièrement quant au concept de "procédure", là où Frege avait introduit dans un cadre à la fois plus général (le langage) et, nous semble-t-il, plus vague à la fois, respectivement le 'sens" du signe (ou "mode de donation" de l'objet) et sa "dénotation". En vérité, ces appellations de Frege ne nous paraissent guère appropriées au cas du registre mathématique : pour nous, la "procédure" d'un objet et sa "substance" en peuvent en effet définir pareillement le "sens". De plus, "dénotation" renvoie nécessairement au dénotant, c'est-à-dire au signe, alors qu'il nous paraîtrait que la définition de la substance est en soi. D'un autre côté, et quant à ce que nous avons appelé ici "substance" et à "procédure", il nous a paru

60 Traduction de *Sinn und Bedeutung*, Publié dans le *Zeitschrift für Philosophie und philosophische Kritik* (1892). Ainsi : "Or, il est naturel d'associer à un signe (nom, groupe de mots, caractères), outre ce qu'il désigne et qu'on pourrait appeler sa dénotation, ce que je voudrais appeler le sens du signe, où est contenu le mode de donation de l'objet." IMBERT C, *Ecrits Logiques..*, op.cit, 103.

nécessaire, en vue d'une bonne gestion épistémologique, d'y ajouter la *dénomination* de leurs représentations symboliques, respectivement la "Forme" et l' "assemblage", qui, à notre connaissance, n'apparaissent pas chez Frege. Quant aux représentations, nous les avons effectuées bien simplement, dans la symbolique et la syntaxe mathématiques usuelles, au moyen de parenthèses rondes, ajoutées ou élidées et sans apport de signes idéographiques nouveaux, comme l'*Horizontal* fregien. Ultimement nous avons aussi proposé la définition supplémentaire -à nos yeux directement opératoire- de l' "objet" (d'une Forme renseignée) comme le couple (procédure, substance).

7.9.3. Sur la diversité des Clés.

Dans l'exemple de 7.9.1, l'objet achevé de la Forme renseignée (PHI) est aujourd'hui dénommé un polynôme réel à une indéterminée, de degré deux. Si, partant de la même (PHI), on change de Clé, les Lettres a, b, et c étant interprétées comme nombres requis, et x comme nombre indéterminé [61], l'objet associé est alors un polynôme réel à trois variables, de degré un (une forme linéaire).

Au XVII^e siècle, le Changement de Clés entre Donné et Requis fut à peu près le seul exemple de jeux d'interprétations primaires distinctes, sur une même Forme. Avec le temps cependant, les Clés se diversifièrent. Ainsi, aujourd'hui, toujours à propos de la même Forme, la Lettre x pourra être interprétée, non plus comme un nombre inconnu, mais à son tour comme un polynôme réel, inconnu, à une indéterminée, opérant ainsi une vaste extension des champs, inconcevable au XVII^e siècle. Point et Croix seront alors somme et produit de polynômes, cependant que les Lettres a, b, c continueront par exemple de représenter des nombres indéterminés. La procédure du nouvel objet, associé à la même Forme et à ce nouveau jeu d'interprétations, fait donc intervenir à son intérieur somme et produit de polynômes. Et sa substance est ici un certain polynôme réel à une variable. Avec encore une autre Clé, x pourra être interprété comme une matrice carrée, de taille quatorze par exemple, et a, b, c continueront d'être signes de nombres indéterminés [62].

61 Le Point et la Croix étant toujours les signes opératoires d'addition et de multiplication de nombres.

62 La substance de l'objet de la Forme est dans ce cas, à nouveau, une matrice carrée de taille quatorze.

Ces diverses Clés ouvrent clairement des perspectives signifiantes différentes sur la même Forme. D'un autre côté, il arrivera aussi qu'à l'intérieur de certains contextes, les interprétations demeureront inchangées. Dans ce cas, et pour faire bref, nous conviendrons alors de ne pas les répéter chaque fois. Ainsi utiliserons nous souvent dans la suite l'expression "objet d'une Forme", sans spécifier qu'elle est renseignée, non plus que sa Clé, lorsque celle-ci a été localement définie, parfois en indiquant seulement que l'interprétation en est "usuelle."

Nous reviendrons, en terminant, sur une Forme convenablement renseignée et son interprétation effective. Comme nous l'avions déjà noté, celle-ci peut être possible, comme dans tous les exemples jusqu'ici traités, et aussi bien contradictoire et impossible. Nous prendrons comme exemple :

$$\frac{1}{1}\, a \,.\, b + \frac{1}{0} \,.\, (1 - a) \,.\, b + \frac{0}{1} \,.\, a \,.\, (1 - b) + \frac{0}{0} \,.\, (1 - a) \,.\, (1 - b)$$

que nous supposerons renseignée selon des Clés usuelles : 0 et 1 sont les signes de deux certains nombres entiers, a et b ceux de nombres indéterminés, Point, Croix et Barre ceux des trois opérations usuelles. Elle n'admet pas alors d'interprétation possible. Convenablement renseignée, cette Forme est ainsi sans objet. D'un autre côté, on la trouve usuellement chez Boole, dans les *Lois de la Pensée* [63], avec cependant une tout autre Clé : a et b sont les signes de variables logiques indéterminées, 0 et 1, ceux du Vrai et du Faux, Point, Croix et Barre, ceux d'opérations logiques, au sens booléen [64]. L'objet associé à notre Forme résume alors pour Boole le résultat de la "division logique" :

$$a.\, x = b \qquad [65]$$

Boole dit qu'il a "développé" x, comme fonction logique de deux variables logiques, de signes a et b. Et cette construction, dans les *Lois*, n'est nullement anecdotique, mais au contraire la clé de voûte de la méthode booléenne générale de résolution des systèmes logiques de

---

63 An Investigation of THE LAWS OF THOUGHT on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities. Mac Millan. 1854. Réed. Dover. New-York. 1958, page 74.

64 La "somme logique" booléenne est en particulier censée être, dans tous les cas, disjonctive. Cette limitation, persistance de conceptions étroitement numériques anciennes qui demeuraient fortes chez
172 Boole, le conduisit à l'écriture de Formes sans signification, même dans son propre système, comme 1 + x, par exemple. Ses successeurs, Pierce, Schröder et Venn, commenceront, à juste titre, par s'affranchir de cette contrainte volontaire. On trouvera une excellente analyse sur ce point dans DIAGNE S., *Boole, l'oiseau de nuit en plein jour*. Belin. Paris. 1989.

65 *Laws*, op. cit, 104. On en donne en annexe un *fac simile*.

p équations à n inconnues [66]. La même Forme aura donc été ici pourvue d'une autre Clé, qui l'a rendue interprétable, de façon complète et féconde. Des significations, en particulier celle du $\frac{0}{0}$ comme signe de l'Indéterminé et $\frac{1}{0}$ comme celui de l'Impossible, qui suscitèrent néanmoins, comme on imagine, l'incompréhension des contemporains. L'argumentaire principal de Boole [67], à l'effet de faire accepter sa théorie, pourtant parfaitement opératoire, fut l'invocation rituelle des quantités imaginaires, paradigme originaire pour la pensée mathématique depuis le XVI^e siècle, des Formes sans signification. La méthode de Boole, ne fut acceptée de la communauté qu'après que la publication des travaux de Venn (et ses "diagrammes") eut fourni au lecteur un support visuel aux opérations logiques.

7.10. Propositionnelles et objets.

Ce qui vient d'être dit des Formes se transpose de plein droit aux propositionnelles, ce que nous ferons brièvement. Toute propositionnelle est en effet combinatoirement constituée de deux Formes, amont et aval, et d'un constitutif. Les Formes, convenablement renseignées, sont interprétées, pour leur part, comme objets mathématiques et le constitutif, comme la mise en relation de leurs substances, par adéquation par exemple. Nous dirons alors que la propositionnelle est elle-même renseignée. Dans ces conditions, toute propositionnelle renseignée est interprétée en une proposition mathématique, en l'occurence l'assertion de mise en relation des substances des deux objets.

Dans ces conditions donc, on définira pareillement l'objet d'une propositionnelle renseignée, comme concept double : par procédure et substance. La procédure est la proposition elle-même, c'est-à-dire l'énoncé complet du jugement de mise en relation des substances des deux objets (mathématiques) des Formes : elle fait donc intervenir de plein droit, non seulement l'interprétation du constitutif, mais aussi intégralement les procédures des deux Formes, elles-mêmes dépendant des Clés d'interprétations respectives, en d'autres termes des objets des deux Formes. D'un autre côté, la

66 La méthode booléenne se fonde sur deux opérations spécifiques : l'élimination et le développement. *On the reduction of systems of propositions*, in *Laws*, op. cit, 114-129. Sous le nom de méthode des éliminations successives, le procédé fut ensuite largement amélioré puis présenté de façon compréhensible pour le public, par Schröder, *Vorlesungen über die Algebra der Logik*, Vol 1, Section 19. Leipzig. 1890. Nous en avons donné une présentation moderne, dans le cadre de la théorie des treillis, in SERFATI M. : *Algèbres de Boole, avec une introduction à la théorie algébrique des graphes orientés et aux " sous-ensembles flous "*. SEDES. Paris. 1974, 90-95.

67 *Laws*, op. cit, 69.

substance de l'objet de la propositionnelle (renseignée) sera le Vrai ou le Faux, sa valeur de véracité ou de fausseté donc, une variable booléenne binaire, en termes modernes. Nous avons précédemment élaboré ce que nous avons appelé l'objet mathématique d'une Forme ; dans le cas d'une propositionnelle, nous qualifierons de logique son objet. Un point de vue développé par Frege dans *Fonction et concept* [68] dans le cadre, plus large que le nôtre ici, de la philosophie du langage [69]. On donnera évidemment des noms, divers et contingents, à ces objets logiques : ainsi parlera-t-on d'équations, d'inégalités, d'identités. Ainsi, à une Forme ou une propositionnelle renseignée, correspond-il une procédure déterminée. A la procédure, il se peut que corresponde une substance déterminée, tandis qu'une même substance est évidemment susceptible de plusieurs Formes [70]. Il n'est par contre pas assuré, qu'une procédure étant donnée, il lui corresponde une substance [71].

Nous terminerons par des illustrations de la diversité des Clés, dans le cas des propositionnelles, avec cet exemple:

$$x^3 = 1$$

qui sera toujours interprété comme équation. Sans prétendre à l'exhaustivité, nous voulons simplement souligner qu'on peut aujourd'hui l'équiper, de façon naturelle, de cinq jeux de significations primaires bien différents :

---

68 "*Fonction et concept* passe en revue les différentes fonctions logiques que requiert l'idéographie. Cette revue suit un ordre qui satisfait deux principes. D'une part, Frege donne à chacune de ses innovations l'autorité d'un analogue bien connu en mathématiques (...) Le pas essentiel est donc celui qui permet la nouvelle extension de la notion de *fonction,* il consiste à recevoir comme des *objets* les deux valeurs de vérité." IMBERT, C,*Ecrits logiques...,* op.cit, 30

69 C. IMBERT : "En premier lieu, Frege étend à toute unité de la langue commune (*Ausdruck*): nom, groupe de mots, proposition, le principe mis à jour sur l'égalité arithmétique.Dans le cas des propositions, on dira que cette dénotation est une *valeur de vérité,* le vrai ou le faux ", idem, 31.

70 Nous ne faisons ici que suivre Frege dans *Sens et dénotation* : " Le sens d'un nom propre est donné à quiconque connait suffisamment la langue ou l'ensemble des désignations dont il fait partie; mais la dénotation du signe, à supposer qu'elle existe, n'est jamais donnée en pleine lumière. Une connaissance parfaite de la dénotation serait telle que, de tout sens donné, on pourrait décider s'il convient ou non à cette dénotation. Ce qui n'est pas en notre pouvoir.

174 Le lien régulier entre le signe, son sens, et sa dénotation, est tel qu'au signe correspond un sens déterminé et au sens une dénotation déterminée tandis qu'une seule dénotation (un seul objet) est susceptible de plus d'un signe. (...) Il n'est pas dit pour autant qu'une dénotation corresponde toujours au sens. Les mots "le corps céleste le plus éloigné de la terre " ont un sens mais ont-ils une dénotation? C'est bien douteux. L'expression "la suite qui converge le moins rapidement " a un sens, mais on démontre qu'elle n'a pas de dénotation. Pour toute suite convergente donnée, on peut en trouver une qui converge plus lentement mais converge néanmoins. On peut donc concevoir un sens sans avoir pour autant avec certitude une dénotation." IMBERT, C, *Ecrits logiques....,*op.cit, 104.

71 Une situation que nous examinons continûment dans le chapitre 14 (*Formes sans signification* s).

a) x est interprété comme un nombre réel et 1 comme le nombre unité. L'équation admet alors pour unique solution le nombre de valeur 1.

b) x est interprété comme nombre complexe (et 1 comme le complexe unité). L'équation admet alors trois solutions deux à deux distinctes.

c) x est interprété comme matrice carrée réelle de taille quatre (par exemple) et 1 comme la matrice unité de cette même taille.

d) x est interprété comme matrice carrée complexe, de taille quatre (par exemple) et 1 comme la matrice unité de cette même taille. Toutes les solutions sont alors diagonalisables [72].

e) x est interprété comme la troisième des composantes disjonctives de l'élément x d'une algèbre de Post quelconque, d'ordre quatre par exemple. La seule solution est alors l'unité. Si l'algèbre de Post est supposée être d'ordre cinq, la seule solution est l'élément e_3 de la chaîne fondamentale [73].

---

72 Elle admet en effet un polynôme annulateur ($\lambda^3 - 1$), scindé sur le corps C.

73 Pour illustrer notre démonstration sur cette propositionnelle, nous avons à dessein choisi ici un exemple moins connu du public. Pour une présentation résumée des algèbres de Post, on pourra par exemple consulter la partie introductive de : SERFATI, M : *On postian algebraic equations, Discrete Mathematics*, 152, (1996), 269-285.

ANNEXES AU CHAPITRE 7

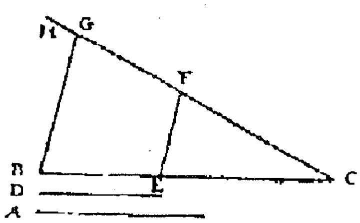
Annexe 1 . Résolution "en lignes" chez Viète .

THEOREME

Comme la difference des costez semblables, est au majeur ou mineur costé semblable, ainsi la difference des vrays costez, au majeur ou mineur vray costé.

EN LIGNES.

La difference des costez soit A et la raison du majeur au mineur, comme BC à D, soit retranchée de BC la ligne BE égale à D : puis au point C tirée une ligne droite infinie CH, sur laquelle ayant pris CF égale à A, et conjoints E et F, s'y du point B et menée la ligne BG parallele à EF, coupant CH en G ; les costez requis feront GC, GF.



Car ils different entr'eux de la ligne FC égale à A, et leur raison est comme BC à EF ; c'est à dire BC à D. Eucl. l.6. p.2 et 4. ce qui estoit proposé

Viète, *Isagoge* , op. cit, page 76. traduction française de de Vaulézard. La lecture demande un constant va et vient entre figure et texte. Il est impossible de reconnaître les constructions intermédiaires à partir de la seule figure, censée valoir pour une classe de situations géométriques.

Annexe 2. Indéterminé et méthode analytique chez Viète.

ZETETIQUE II.

Estant donnée la diference de deux costez, et la raison d'iceux ; trouver les costez.

Soit B la diference donnée entre les costez, la raison du mineur costé au majeur, comme R à S. Il faut trouver les costez.

Le mineur costé soit A : donc le majeur sera A + B : parquoy A est à A + B comme R à S. Laquelle Analogie estant resolue à egalité par le produit des moyens R et A + B. et celuy des extremes S et A, en SA égal à RA + RB, et par translation sous signe contraire de RA. RB sera égal à SA − RA, le tout estant divisé par S − R. $\frac{RB}{S-R}$ *sera égal à A.*

D'où s'ensuit par la constitution de ceste equation en proportion, que S − R sera à R comme B à A.

Sy B est posé 12, S 3, R 2, $\frac{RB}{S-R}$ sera 24 pour la valeur de A et A + B, 36 dont la diference est 12, et la raison comme 2 à 3 selon le Requis.

Item soit le majeur costé E, le mineur costé sera E − B : donc comme S à R ainsi E à E − B. Laquelle Analogie estant resolue en égalité par le produit des extremes SE − SB égal au produit de moyens RE. Et par translation convenable SE − RE egal à SB. Partant S − R sera S comme B à E.[a]

Parquoy E est 36. sçavoir le quatrième terme proportionné à 3 − 2. 3 et 12. E − B 24. qui sont les

Viète, *Isagoge* , op. cit , page 75. Traduction française de de Vaulézard. C'est le *même problème* que précédemment, que Viète traite cette fois analytiquement, afin de mettre en valeur les avantages de la méthode de l'Indéterminé : dans les premières lignes, B (consonne) est ainsi le signe d'un donné indéterminé, celui d'un des côtés (différence des grandeurs) et A (voyelle), celui d'une inconnue (le plus petit côté). Historiquement, se trouve ici constituée la première mise en équation littérale d'un problème. De structure bien plus complexe, le problème de Pappus dans la *Géométrie* de Descartes ne fera que reprendre le procédé.

Annexe 3 . L'"arrangement" des équations chez Viète.

THEOREMA I.

SI A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A, æquetur B cubo 2 − D plano in B. A quad. + B in A 2, æquabitur B quad. 2 − D plano.

Quoniam enim A quadr. + B in A 2, æquatur B quadr. 2 − D plano. Ductis igitur omnibus in A. A cubus + B in A quad. 2, æquabitur B quad. in A 2 − D plano in A.

Et iisdem ductis in B. B in A quad. + B quadr. in A 2, æquabitur B cubo 2 − D plano in B. Iungatur ducta æqualia æqualibus. A cubus + B in A quad. 3 + B quad. in A 2, æquabitur B quad. in A 2 − D plano in A + B cubo 2 − D plano in B.

Et deleta utrinque adfectione B quad. in A 2, & ad æqualitatis ordinationem, translata per antithesin D plani in A adfectione. A cubus + B in A quadr. 3 + D plano in A, æquabitur B cubo 2 − D plano in B. Quod quidem ita se habet.

1 C + 30 Q + 44 N, *æquatur* 1560. *Igitur* 1 Q + 20 N, *æquabitur* 156. *& fit* 1 N 6.

Equations dans le *De emendatione aequationum* de Viète, ("arrangement" des équations) publié dans les *Opera mathematica* de 1646. On notera le style quasi rhétorique, lié à l'absence complète de Délimitants et de constitutifs : ainsi l'égalité est indiquée rhétoriquement (*aequatur*), et le texte est bien ambigu dans l'ordre d'exécution des opérations. Sur le plan signifiant par contre, Viète respecte scrupuleusement ses objectifs d'homogénéité.

Annexe 4. L'ininterprétable chez Boole.

$\ldots (1-y)$, (

or the expansion required. Here $f(1, 1)$ represents what $f(x, y)$ becomes when we make therein $x = 1$, $y = 1$; $f(1, 0)$ represents what $f(x, y)$ becomes when we make therein $x = 1$, $y = 0$, and so on for the rest.

Thus, if $f(x, y)$ represent the function $\frac{1-x}{1-y}$, we find

$$f(1, 1) = \frac{0}{0}, \quad f(1, 0) = \frac{0}{1} = 0, \quad f(0, 1) = \frac{1}{0}, \quad f(0, 0) = 1,$$

whence the expansion of the given function is

$$\frac{0}{0} xy + 0x(1-y) + \frac{1}{0}(1-x)y + (1-x)(1-y).$$

It will in the next chapter be seen that the forms $\frac{0}{0}$ and $\frac{1}{0}$, the former of which is known to mathematicians as the symbol of indeterminate quantity, admit, in such expressions as the above, of a very important logical interpretation.

Suppose, in the next place, that we have three symbols in the function to be expanded, which we may represent under the general form $f(x, y, z)$. Proceeding as before, we get

7 . Viète et l'Indéterminé.

180

Première partie :
Le système.

Chapitre 8

Puissances. De Diophante à Viète.

8

Puissances. De Diophante à Viète.

8.1. Puissances.

Placés devant une grandeur inconnue, telle la Chose du système cossique ou l'arithme diophantien, les géomètres estimèrent très vite indispensable d'en concevoir le "Quarré", c'est-à-dire celle-ci réitérée, mulipliée par elle-même, et aussi son Cube. Audelà du Cube, il était des espèces supérieures dénommées le Carré-Carré (ou Bicarré, selon les auteurs), puis le Sursolide, bref une lignée de "puissances" ou "dignités" [1] d'une même Chose. Le plus simple des calculs entremêlant la Chose, le Quarré, et le Cube, il devint nécessaire de représenter dans l'écriture symbolique d'abord le Quarré, puis toute la lignée. Si la nécessité de cette représentation ne fut mise en doute par aucun géomètre, les solutions proposés, en dépit de l'apparente implicité de la question, furent étonnemment diverses non seulement sur le plan du choix du type des signes (Chiffre, Lettre, Figure), mais surtout quant à la procédure même de représentation. Nous donnerons cinq exemples épistémologiquement significatifs des systèmes proposés, de Diophante à Descartes. Il y eut bien d'autres tentatives et d'autres auteurs, inventoriés et examinés par Cajori [2]. C'est Descartes, qui, par son exposant, mit fin à des siècles de notations éparses, quelquefois insolites, mais jamais cependant opératoirement achevées avant lui. On fera mieux comprendre l'importance de la représentation des espèces de puissances en montrant *in fine*, qu'essentielle sur le plan de la technique mathématique, elle fut en même temps la première, historiquement parlant, qui conduisit à la représentation dans l'écriture symbolique d'un concept composé.

Dans ce chapitre, on commencera par analyser les représentations symboliques des puissances chez cinq auteurs significatifs sur ce plan : Diophante, les Cossiques (Stiefel), Viète, Bombelli, enfin Descartes. Notre étude sera menée en étroite relation avec les deux concepts, ici naturels, de substance et de relation. La substance sera ici pour nous celle de la grandeur qui demeure la

---

1 Le terme de "dignité " est usuel au XVIII^{e} siècle dans cette acception. Cf. par exemple LAMBERT, J.H "*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*". Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin [17] (1761), 1768, pp 265-322.

2 *Signs of Powers*, in CAJORI, I, 335-360.

même dans une lignée. Quarré, Cube, etc... se rapportant à une même Chose, la codification de celle-ci et les modalités de cette représentation seront pour nous le premier aspect, que nous dirons substantiel, de la présente étude. Se posera en second lieu la question de la relation, caractérisant le rapport de l'espèce considérée à la Chose dont elle est issue : Cube, ou Sursolide par exemple sont dans un rapport trois et quatre respectivement à la Chose. Les modalités de l'éventuelle représentation de ce prédicat constitueront le second aspect, que nous dirons relationnel. On étudiera enfin un tierce critère, la substituabilité, dont l'importance (qui deviendra considérable) commença à apparaître au XVI[e] siècle. On examinera ainsi les solutions apportées à ces divers titres par les géomètres.

8.2. Le système diophanto - cossique.

Une des spécificités de l'écriture symbolique syncopée chez Diophante tenait en la coexistence d'un signe ζ pour l'arithme, conjointement à d'autres, radicalement distincts, pour le Carré de ce même arithme [3] :

$$\Delta^{Y}$$

et aussi son Cube [4] : K^{Y}. Une batterie de signes divers complètait alors la représentation du Bicarré [5], $\Delta^{Y}\Delta$ du Carré-Cube [6], ΔK^{Y}, et du Cubo-Cube [7] $K^{Y}K$. Diophante exhibait en outre un signe nouveau, s^{x}, pour l'inverse de l'inconnue, et un autre encore, Δ^{Yx}, pour le carré de celui-ci [8].

Le même désordre méthodologique était à l'oeuvre dans le sytème cossique, avec toutefois des signes bien différents des précédents : la Chose avait pour symbole ꝶ, son Quarré, ou *Census* était usuellement représenté, chez Stiefel ou Rudolff par exemple, par

ʓ

3 δὺναμιζ, Cf. VER EECKE, *Diophante*, op. cit, 2.

4 Κὺβοζ.

5 δυναμοδὺναμιζ.

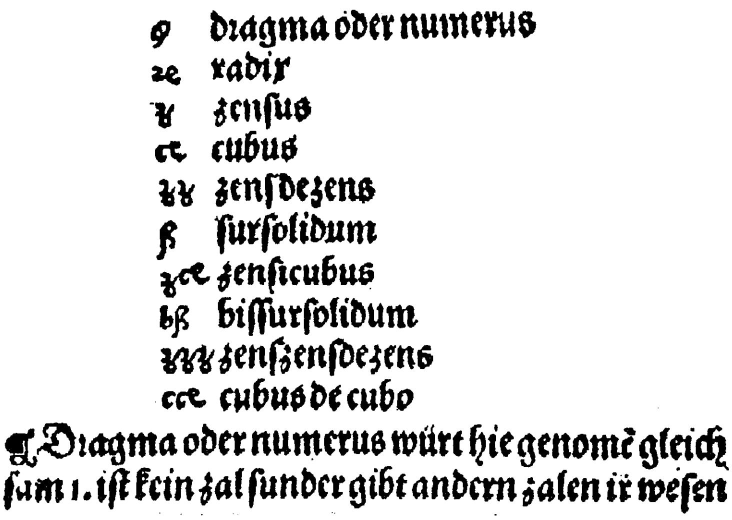
6 δυναμὸΚὺβοζ.

7 ΚὺβὸΚὺβοζ .

8 HEATH, *Greek*, II,op. cit, 458.

et son Cube par ce

De même, le Bicarré avait pour signe ʒʒ etc... La *Coss* (1525), de Rudolff, expose ainsi un des premiers inventaires de tels signes, avec dix niveaux :


ϕ dragma oder numerus
ꝛe radix
ʒ zensus
ce cubus
ʒʒ zensdezens
ß sursolidum
ʒce zensicubus
bß bissursolidum
ʒʒʒ zenszensdezens
cce cubusdecubo
Dragma oder numerus würt hie genomē gleich sam 1. ist kein zal sunder gibt andern zalen ir wesen

Un siècle et demi après Rudolff, Wallis (1657) proposait encore un très long inventaire des diverses espèces cossiques [9]. Nous analysons ci-dessous le mode d'emploi du système cossique et ses limitations intrinsèques, les mêmes en vérité que celui de Diophante.

8.3. Une équation chez Stiefel.

Dans l'*Arithmetica Integra*, Stiefel se proposait de résoudre cossiquement :

1 ʒʒ + 2 ce + 6 ʒ + 5 ꝛe + 6 aequ. 5550

Entremêlant ainsi la Chose, le Census, le Cube et le Bicarré, la question est qu'on appelle anachroniquement aujourd'hui, depuis Descartes, une équation numérique du quatrième degré [10]. Elle était à l'époque considérée comme une relation entre des espèces (Chose, *Census*, ...)qu'il fallait résoudre, c'est-à-dire démêler. C'était un problème difficile, aucune méthode générale n'étant connue [11].

---

9 CAJORI, I, 215.

10 in *Arithmetica Integra* (1544), fol 307 b. Exemple provenant de CAJORI, I, 139-140.

11 Le traité de Stiefel parut à Nuremberg en 1544, un an avant la publication de l'*Ars Magna*, de Cardan, toujours à Nuremberg, qui contient la première des méthodes connues pour les équations générales du 4° degré (due à Ferrari).

Du texte "syncopé" de Stiefel, nous fournirons d'abord une traduction du latin rhétorique, en conservant intacts les signes eux-mêmes et pour l'essentiel, leur place dans le texte. Nous donnons aussi une note avec commentaires en termes modernes [12], et, en annexe, un *fac simile* du texte original.

> "On cherche un nombre tel que, ajouté à son carré, on obtienne 5550. Dans ces conditions, ce carré vaut 1 A ʒ. Donc sa racine vaudra 1 A. Et donc 1 A ʒ + 1 A vaudra 5550. Donc 1 A ʒ vaudra 5550 - 1 A. 1.A vaut donc 74. Alors comme ʒʒ + 2 ce + 6 ʒ + 5 𝓍 + 6 est égalé à 5550. il s'ensuit que 74 est égal à 1 ʒ + 1 𝓍 + 2... De là, il vient que 1 𝓍 vaut 8."

L'analyse de la résolution, en termes post-cartésiens anachroniques, est ainsi : pour résoudre l'équation proposée :

$$x^4 + 2\,x^3 + 6\,x^2 + 5x + 6 = 5550 \quad (1),$$

Stiefel a effectué un changement d'inconnue, en posant :

$$x^2 + x + 2 = A \qquad (2)$$

En calculant $A^2 + A$, il vient :

$$A^2 + A = (x^2 + x + 2)^2 + x^2 + x + 2$$

Donc :

$A^2 + A = x^4 + 2\,x^3 + 6\,x^2 + 5x + 6$, c'est-à-dire le premier membre de l'équation proposée ! On mesure bien ici à quel point l'exemple est *ad hoc*. Résolvant alors l'équation

---

12 *Traduction en termes modernes* :
"Il s'agit de résoudre $x^4 + 2\,x^3 + 6\,x^2 + 5\,x + 6 = 5500$.
On recherche A tel que $A^2 + A = 5550$. Le "quarré" de cet A ainsi trouvé est un "census" et s'écrit A^2. La racine de ce quarré vaut donc 1 A. Donc $A^2 = 5550 - A$ et A vaut 74. Alors comme on a $x^4 + 2\,x^3 + 6\,x^2 + 5\,x + 6 = 5500$, il s'ensuit que $x^2 + x + 2 = 74$ et donc $x = 8$. "

Ainsi Stiefel a-t-il remplacé la question proposée par la résolution successive de deux équations du second degré :

$A^2 + A = 5550$ d'une part et $x^2 + x + 2 = A$ d'autre part.

In fine, il a exhibé "la" racine de chacune des équations du second degré, sans calcul ni explications.

$$A^2 + A = 5550 \qquad (3),$$

Stiefel ramène donc l'équation proposée, du quatrième degré, à la résolution successive de deux équations du second, pour lesquelles les résultats étaient bien connus à l'époque : chaque solution de (3) fournit ainsi le second membre de (2). Stiefel ne retient de l'équation (3) que la solution A = 74. Injectée dans le second membre de (2), il vient :

$$x^2 + x = 72$$

dont à nouveau, il ne retient que la solution positive $x = 8$.

Pour faire brièvement comprendre le schéma de la méthode, nous avons ici exceptionnellement utilisé une représentation anachronique. D'un autre côté, la solution effective dans le texte original est bien peu claire : pour résoudre l'équation proposée, Stiefel, sans explication préalable, a commencé par en proposer une autre, du second degré, que nous dirons *auxiliaire* :

> "On cherche un nombre tel que, ajouté à son carré, on obtienne 5550."
>
> C'est-à-dire " 1 A $\mathfrak{z}$ + 1 A vaudra 5550 " [13]

Stiefel dénomme A cette inconnue auxiliaire, dont le carré, dit-il, vaudra 1 A $\mathfrak{z}$ (la notation $\mathfrak{z}$ est ici bien évidemment ambiguë, puisqu'identique à celle du carré de l'inconnue de l'équation initiale proposée). Sans plus d'explications cependant, l'auteur déclare alors avoir résolu l'équation auxiliaire et trouvé "la" racine :

1.A vaut 74,

un résultat que nous appellerons "préliminaire".

Stiefel, qui ne s'est aucunement expliqué sur la méthode de résolution, a aussi rejeté, sans même l'évoquer, l'autre solution de l'équation auxiliaire pour n'en retenir que la racine positive [14]. Les lignes qui suivent sont plus abruptes encore, Stiefel introduisant en effet, sans davantage d'explications, l'expression nouvelle :

$$1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{r} + 2$$

---

13 On recherche A tel que $A^2 + A = 5550$.

14 L'autre racine vaut : - 75.

et constate -sans calcul explicite- que si on ajoute à cette dernière son propre carré, on obtient le premier membre de l'équation initiale [15].

Ceci demande quelque commentaire. Il s'agit d'abord de calculer le carré de $1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2$. Or ce carré ne peut s'écrire directement, symboliquement, dans le système cossique, la représentation au moyen du signe $\mathfrak{z}$ ne permettant en effet que l'écriture du carré de la seule Chose initiale. Pour évoquer le carré de l'expression nouvelle, Stiefel a donc été contraint d'abandonner la représentation symbolique directe des puissances, et de multiplier l'expression par elle-même :

$$(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2).(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2)$$

Dans ces conditions donc, et pour continuer le calcul, il devra alors, impérativement, savoir faire son affaire d'expressions comme :

$1\,\mathfrak{x}\,.1\mathfrak{z}$ par exemple.

A cet effet, il fera intervenir quatre des règles multiplicatives élémentaires régissant les signes cossiques, dont voici deux exemples [16] :

$1\,\mathfrak{x}\,.1\,\mathfrak{x}$ égal à $1\,\mathfrak{z}$ *(de la Chose multipliée par de la Chose fait du Carré)*

$1\,\mathfrak{x}\,.1\,\mathfrak{z}$ égal à $1\,\mathfrak{ce}$ *(de la Chose par du Carré fait du Cube).*

Moyennant quoi, le lecteur pourra effectivement constater que

$(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2).(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2)$ est égal à

$$1\,\mathfrak{zz} + 3\,\mathfrak{ce} + 5\,\mathfrak{z} + 4\,\mathfrak{x} + 4.$$

A ce dernier résultat, Stiefel ajoute enfin l'expression nouvelle elle-même, soit : $1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2$; il vient alors :

$$1\,\mathfrak{zz} + 3\,\mathfrak{ce} + 6\,\mathfrak{z} + 5\,\mathfrak{x} + 6,$$

---

15 $(x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) = x^4 + 2x^3 + 6x^2 + 5x + 6$
Stiefel ne commente pas ce fait véritablement très spécifique, qui permet la résolution.

16 Restent évidemment deux autres règles : *De la Chose par du Cube fait du Sursolide* et *Du Carré par du Carré fait du Sursolide.*

c'est-à-dire le premier membre de l'équation initiale.

Aucun calcul ni explication n'est ici fourni dans le texte. C'est cependant cette particularité insigne qui aura permis de résoudre, en dehors de toute méthode générale, cette équation *ad hoc* du quatrième degré. Egaler à 5550 l'expression finale obtenue, pour obtenir l'équation proposée revient en effet, compte tenu du résultat préliminaire, à égaler

$$1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2 \quad \text{à} \quad 74,$$

soit une nouvelle équation du second degré [17], que Stiefel n'explicite pas davantage, non plus que sa résolution : sa solution, dit-il simplement, vaut 8.

8.4. Analyse du système cossique.

8.4.1 Le prédicat manquant.

Le point clé de la preuve est le changement d'inconnues, comme on l'a montré au moyen de notations cartésiennes. Cette méthode en effet permet la décomposition de l'équation du quatrième degré en la succession de deux équations du second. Sur ce point crucial cependant, le texte de Stiefel est muet, en fait incompréhensible, comme l'avait été avant lui celui de Diophante (Cf. 3.4). Si la résolution est finalement exacte, l'*Arithmetica Integra* présente ici une complexité, une obscurité et une incomplétude difficilement supportables pour le lecteur, et en tout cas impossibles à transcrire et adapter à un exemple d'équation voisin. On atteignait ici les limites de ce qui pouvait être rhétoriquement compris, et en conséquence exécuté, à cette époque.

Une obscurité et une complexité, cependant, qui ne sont pas conjoncturelles, mais résultent structurellement de l'impossibilité où était l'auteur de représenter le changement d'inconnues. En vérité, le problème de symbolisation qui se posait à Stiefel, insoluble depuis l'intérieur de son système, était le suivant : il savait bien écrire $\mathfrak{z}$ comme le carré de la chose $\mathfrak{x}$. Il ne pouvait par contre écrire le carré de $1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{x} + 2$, d'une façon structurellement analogue, comme nous-mêmes l'avons fait plus haut, dans le système cartésien, en remplaçant très simplement A

par A^2. En d'autres termes encore, les formes cossiques $\mathfrak{x}$ et

17 $x^2 + x - 72 = 0$. L'autre racine vaut - 9.

1 ʒ + 1 𝔯 + 2 ne pouvaient être librement *substituées* l'une à l'autre dans l'expression symbolique d'un Carré. Naturellement, ceci était tout aussi impossible pour une Forme quelconque, telle 3𝔯 + 5. En fait, le diophanto-cossique ne permettait en aucun cas l'écriture symbolique du Carré d'une Chose arbitraire. Ce point est essentiel. Stiefel ne pouvait donc évoquer dans le texte le carré de 1 ʒ + 1 𝔯 + 2 -qui lui était indispensable- que par l'explicitation de son développement, c'est-à-dire en le calculant. Développer, cependant, n'est pas représenter; développer, d'autre part, demandera au géomètre diverses règles-comptines (Cf.8.4.2), et donc un appel à des éléments de signification étrangers au sytème symbolique. Cet exemple montre donc l'impossibilité pour Stiefel de changer d'inconnue *à l'intérieur* de son système.

Examinant les raisons de cette inadéquation, on met d'abord en évidence ceci : dans le système cossique, deux signes quelconques ne présentaient aucune similitude : rien ne pouvait donc être déduit de l'examen visuel des signes eux-mêmes, de ce que ʒ représentait le carré, et 𝔠𝔢 le cube, d'une même quantité elle-même par ailleurs symbolisée par 𝔯, bref qu'il était une grandeur-mère, dont on s'était occupé à codifier trois des aspects. Le système cossique ignora donc -entre autres choses- la représentation du Même dans l'Autre. Cette vérité essentielle appartient cependant au registre des significations, et non pas du combinatoire. Qu'en est-il alors au déchiffrement ? On sait qu'une des règles fondamentales de la codification est l'univocité de la représentation, avec ceci pour conséquence : la répétition d'un même signe est l'indication d'un attribut commun. Réciproquement donc, on aurait pu espérer que la présence d'un même attribut soit toujours désignée par la répétition d'un signe. Ce qu'on n'observe aucunement dans le cossique. Autrement dit, ce système n'assura pas la comprésence combinatoire qui se serait interprétée comme l'existence d'un attribut commun à divers référents, savoir la Chose. Et c'est bien parce que la Chose n'était pas représentée en tant que telle par le système diophanto-cossique que ce dernier ne pouvait en représenter le carré. Un manque de codification d'un prédicat donc, que nous dirons substantiel, entraînant l'impossibilité de toute substitution, et, en conséquence, des changements de variables. Pour nous faire davantage comprendre sur ce point, nous emprunterons ici une

Figure à Leibniz : si on substitue ⊕ à 2e par exemple [18], quel sera le substitué de ce ?

Un bref retour historique est ici nécessaire sur un système que nous avons appelé diophanto-cossique. La première version, développée par Diophante, avait été reprise par Rudolff. Elle ne contenait qu'une seule inconnue. Le système prévoyait bien l'écriture du "Quarré", mais d'un carré seulement, représenté par ʒ, d'une inconnue représentée par 2e . C'était la situation initiale, qui avait pu sembler naturelle et suffisante. Ce fut la position de Diophante, dont on a vu les insuffisances. Certains auteurs cossiques, cependant, furent tenus de prendre en compte diverses inconnues dans un même problème, et décidèrent de les représenter par des signes différents. Que faire, dans ce cas, pour la symbolique des carrés de deux inconnues ? Une première réponse, naturelle et naïve, consista à reproduire, à propos de la seconde lignée, la même méthode diophanto-cossique. Ce fut le cas chez Ghaligai [19] qui, utilisant le système de Rudolff pour une première inconnue, représenta ainsi la lignée d'une seconde inconnue :

c° la chose,
√ le census de celle-ci et
√√ son cube

Ce système cossique élargi, apparemment lui aussi naturel, n'était pas en vérité davantage satisfaisant. En présence de deux inconnues représentées par 2e et c°, le système de Ghaligai permettait bien de représenter le cube de chacune (ce et √√ respectivement), mais non pas, par exemple, le cube d'une quantité aussi aisée à écrire que 2e + c°, ou plus simplement encore que 2e + 1. Pour prendre en compte un tel Cube, Ghaligai ne pouvait donc davantage employer son système symbolique neuf, et devait donc, comme tout à l'heure Stiefel, impérativement revenir à la multiplication :

---

[18] ⊕ est une Figure qu'on trouve dans la correspondance de Leibniz. Cf. M.S, II, 104. A Jacques Bernoulli. Avril 1705.

[19] GHALIGAI, *Practica d'arithmetica* (1552), partie du folio 72. Exemple extrait de CAJORI, I, 114.

$$(\mathfrak{2e} + c^{\circ}).(\mathfrak{2e} + c^{\circ}).(\mathfrak{2e} + c^{\circ})$$

Encore s'agit-il d'exemples simples. Que faire lorsque l'expression contenant un Cube devient, naturellement, bien plus complexe ? En vérité, aucun des systèmes cossiques ne permit, dans la symbolique des puissances, une substitution *quelconque*, interprétée comme un changement *quelconque* d'inconnue. Or cette faculté de changer librement d'inconnue était devenue, dès le XVI^{e} siècle, avec la théorie "italienne" des équations cubiques, la clé de constructions de preuves algébriques. La raison de cette inadaptation n'a pas varié : pas plus que celui de Stiefel, le sytème de Ghaligai ne représentait la Chose en soi.

8.4.2 *Res in Rem* et règles - comptines.

Revenons, dans notre équation chez Stiefel, au calcul de :

$$(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{2e} + 2).(1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{2e} + 2)$$

dont le développement exhaustif fournit ces neuf termes :

$$1\,\mathfrak{z}.\,1\,\mathfrak{z} + 1\,\mathfrak{z}.1\,\mathfrak{2e} + 1\,\mathfrak{z}.1\,\mathfrak{2e} + 1\,\mathfrak{2e}\,.1\,\mathfrak{2e} + 2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{2e} + 2\,\mathfrak{2e} + 4.$$

La poursuite du calcul cossique doit alors être ainsi rétablie : "Du Carré par du Carré fait du Sursolide", en sorte que $1\,\mathfrak{z}.\,1\,\mathfrak{z}$ égale $1\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z}$. De même, "du Carré par de la Chose fait du Cube", donc $1\,\mathfrak{z}.1\,\mathfrak{2e} + 1\,\mathfrak{z}.1\,\mathfrak{2e}$ égale $1\,\mathfrak{ce} + 1\,\mathfrak{ce}$, soit $2\,\mathfrak{ce}$. A nouveau, "De la Chose par de la Chose fait du Carré", donc $1\,\mathfrak{2e}\,.1\,\mathfrak{2e}$ égale $1\,\mathfrak{z}$.

Finalement, l'expression vaut $1\,\mathfrak{z}\,\mathfrak{z} + 2\,\mathfrak{ce} + 4\,\mathfrak{z} + 4\,\mathfrak{2e} + 4$ (un Sursolide, deux Cubes, quatre Carrés et quatre Nombres).

Ainsi, pour effectuer le moindre calcul dans le système diophanto-cossique, une batterie de règles supplémentaires était-elle indispensable. Ces règles gouvernaient la façon dont se multipliaient entre elles les espèces : Sursolide, Cube, Carré, Chose.

Leurs résultats ne présentant aucun caractère systématique, elles devaient être apprises par coeur, Diophante y consacrant pour sa part d'interminables pages de son Premier Livre [20]. Pour en faciliter la mémorisation, les cossiques préfèrerent la technique, toute scolastique, de jeux de maximes latines. On les observe partout à l'époque, telle notre première comptine (*De la Chose par de la Chose fait du Carré)*, une règle qui parcourut tout le Moyen âge et jusqu'au XVIe siècle, énoncée en cette célèbre formule latine :

Res in rem fit census [21].

Pour être opératoire, le système diophanto-cossique devait ainsi s'accompagner impérativement de ces comptines. Une obligation fort lourde, et bien stérile en vérité, dont les systèmes du XVIIe siècle parvinrent à se dispenser. S'interrogeant néanmoins sur les raisons de cette obligation, on observe simplement que si, sur le plan symbolique, le système traitait bien le ce et le ʒ ʒ, par exemple, comme des espèces distinctes, au sens physique du terme, il ne représentait pas leurs relations respectives à la Chose commune dont elles étaient issues. Cette relation essentielle, en fait leurs rapports à l'unité, pouvait cependant être simplement indiquée par la valeur d'un certain nombre entier : trois pour le Cube, quatre pour le Sursolide. La symbolique cossique, n'inscrivant aucunement le trois, associé au ce, ni le quatre au ʒ ʒ, le résultat de la multiplication de celui-ci par celui-là devait être nécessairement apporté depuis l'extérieur du système, en l'occurrence par les comptines. Et donc, la relation fondamentale que nous pouvons aujourd'hui, dans l'écriture symbolique post-cartésienne, lire et découvrir entre l'inconnue et l'inconnue réitérée, répétée, composée avec elle même, c'est-à-dire le *Census*, ou le Cube, ne fut, ni chez Diophante, ni au Moyen-Age cossique, aucunement inscrite dans le signe. Il en fut de même dans l'écriture symbolique arabe et l'Ecole italienne du XVIe siècle. Cet indispensable rapport devait alors être nécessairement restitué au moment de l'interprétation depuis l'extérieur du symbolique, au titre des significations, et au prix d'un laborieux apprentissage de règles-comptines.

20 VER EECKE, *Diophante*, op. cit, 3- 8.

21 Par un usage constant à l'époque, le *in* désignait, en latin rhétorique, la multiplication et le *et* l'addition, le verbe *ducere* (*ductum*) indiquant l'action de multiplier.

8.4.3 Le système, de Diophante à Wallis.

Aujourd'hui un peu surprenante, la constitution du système cossique ne fut cependant aucunement un effet du hasard, mais bien le résultat de l'actualisation dans l'une des premières grandes écritures symboliques de cette catégorisation aujourd'hui bien oubliée en mathématiques : la dualité nombre-grandeurs, un des piliers du temple mathématico-physique depuis Euclide. Depuis l'Antiquité en effet, les solutions des équations avaient été perçues, soit comme des nombres à calculer (conception numérique), soit comme des grandeurs à construire (conception géométrique) : dans cette deuxième perspective, le géomètre disposait d'un éventail de grandeurs d'essences distinctes, comme les lignes, les grandeurs-carrées, les grandeurs-cubes. Au-delà des Cubes, pour les Bicarrés ou les Cubo-Cubes de Diophante par exemple, une démarche purement inductive avait évidemment été nécessaire pour définir les nouveaux concepts. Quoiqu'il en soit, cette distinction entre les Essences, que nous dirions aujourd'hui attachée à une vision physique du monde, était au contraire consubstantielle à l'époque à une conception mathématique authentique, dont elle constituait l'un des fondements.

Il nous paraît rétrospectivement aujourd'hui que cette dualité nombres-grandeurs aurait bien évidemment dû se transcrire dans les représentations symboliques. Il n'en fut cependant rien avant Viète : jusque là en effet, dans l'écriture cossique, c'est à la seule conception considérée comme dominante, celle des Essences, qu'on donna spontanément l'exclusivité scripturale, assignant simplement dans l'écrit deux signes différents pour deux espèces différentes de grandeurs, telles ce et ʒʒ. Ce fut, on l'a vu, la seule règle appliquée dans les faits. Une partie importante de l'oeuvre de Viète, consacrée à l'homogénéïté dans le calcul, consista à redresser cette conception, en prenant en compte les deux termes de la dualité, et en leur affectant des représentations différentes [22]. Nous ne développerons pas davantage ici cet aspect, aujourd'hui considéré comme relevant de l'épistémologie de la seule Physique.

Avec pour origine une conception physique du monde, et en dépit de ses déficiences, le sytème diophanto-cossique occupa le terrain treize siècles, de Diophante à Wallis, avant d'être définitivement supplanté par celui de Descartes au milieu du XVII^e

22 Cf. RITTER, op. cit, 375-376 et SERFATI, *La Question...*, op. cit, 317-319.

siècle. L'idéologie qu'il véhiculait disparut alors rapidement avec lui, au point qu'au XIX^{e} siècle, les pages d'écriture cossique étaient devenues hermétiques aux commentateurs du temps, telles des hiéroglyphes non interprétés. Ainsi, Foucher de Careil, commentateur accoutumé de Descartes philosophe, lorsqu'il entreprit de traduire, sous le titre de *Pensées* de Descartes, les *Cogitationes Privatae*, nous offre-t-il une traduction extravagante de la partie mathématique : ne reconnaissant pas le signe 2e pour la Chose, il le confondit en effet avec le signe 4.

8.4.4 Concepts simples ou composés : la représentation des prédicats.

Les conclusions des sections précédentes peuvent se résumer à un inventaire de ce qu'on est tenté d'appeler rétrospectivement les déficiences et inconvénients du sytème diophanto-cossique : impossibilité de fait de changer symboliquement d'inconnue, impossibilité même d'énoncer, dans le système, la substitution d'une quantité à une autre et donc de promouvoir une méthode générale de résolution des équations algébriques, enfin l'absolue nécessité de règles-comptines scolastiques pour pouvoir effectuer le moindre calcul multiplicatif.

L'analyse de ces insuffisances, qu'on aurait pu croire à tort inhérentes à l'écriture mathématique même, mais que d'autres systèmes symboliques vinrent ultérieurement redresser, a montré l'importance majeure rétrospective, dans la lignée des puissances, de ces deux prédicats : la Chose et la relation. Si un système symbolique avait décidé de les représenter tous deux, la règle d'univocité exigeait alors, non plus un signe, mais deux, dont la conjonction sera plus loin appelé par nous, en hommage à Leibniz, un "charactère" [23]. Un tel concept aura alors été regardé comme composé. Pour les motifs ci-dessus évoqués, le système cossique "choisit" en fait de n'utiliser qu'un seul signe, impliquant ainsi que le concept de puissance était pour lui simple, et non composé. Bien plus, le signe cossique ne représenta en vérité *aucun* des deux prédicats. Bien entendu, ceci ne constituait aucune faute logique, le système étant en effet gouverné par les règles d'univocité et d'arbitraire du signe. En une démarche qui peut sembler naturelle, le cossique fonctionnait dans le registre de l'inventaire : à chaque objet distinct nouvellement apparu, il assignait tout simplement une représentation distincte. Les embarras et les limitations corrélatifs

23 Ici, du concept des espèces de puissances.

d'une semblable conception ont été alors décrits. Et le système cossique ne fut mis en cause, à la fin du XVI^{e} siècle, qu'après seulement que les géomètres se fussent dans les faits convaincus qu'il n'était *pas* opératoire d'avoir supposé que le concept d'Espèce de puissances était simple. Dès lors, tous les systèmes qui suivirent produisirent, avec d'innombrables avatars, des représentations utilisant une conjonction de deux signes.

En vérité, ces conclusions soulèvent, quant à l'économie générale de la représentation symbolique, une question plus large : faut-il ou non mutiplier les prédicats à représenter ? Certes, il est souhaitable que le signe représente du mieux possible le référent, avec toutes ses facettes, en particulier l'indication des caractères communs qu'il peut posséder avec d'autres. D'un autre côté, il ne peut être question de tout représenter. Cette question est discutée ci-dessous en 12.1.

8.5. Le système de Bombelli.

En réaction devant l'inadéquation et les échecs du cossique, un certain nombre de systèmes virent alors le jour aux XV^{e} et XVI^{e} siècles, qui, d'une façon ou d'une autre, prenaient en compte l'existence de deux prédicats constitutifs. Le système de Rafaele Bombelli, déjà évoqué en 7.3 sur un exemple, marqua un net progrès sur celui de Stiefel et aussi de Cardan. Bombelli, homme méticuleux et précis, avait reconnu en l'*Ars Magna*, de Cardan, un ouvrage remarquable, mais qui, faute d'explications préalables suffisantes selon lui, demandait à son lecteur un effort trop important. Ainsi, l'un des objectifs de la rédaction de l'*Algebra* paru en 1572 (le manuscrit, composé vers 1560, avait cependant beaucoup circulé) était de répondre à un souci d'ordre pédagogique.

Comme on a vu, la Chose est représentée chez Bombelli par $\overset{1}{\cup}$, et son Carré par $\overset{2}{\cup}$, etc... Les puissances sont donc ici symbolisées, non plus par un seul signe comme dans le cossique, mais par une juxtaposition très particulière de deux signes, dont l'un est un Chiffre pur, et l'autre la Figure $\cup$, que nous appellerons le Creux.

Au moment du déchiffrement, la disposition graphique particulière indiquait une organisation spécifique, celle d'une puissance d'espèces. Le Chiffre était interprété comme un nombre entier, rapport à l'unité de la puissance considérée. En une avancée considérable par rapport au système cossique, le système représentait donc clairement la relation, que Bombelli avait convenablement analysée en un prédicat numérique, ainsi justiciable d'une représentation par un Chiffre pur. Au moment de l'interprétation, il suffisait alors simplement d'écrire :

$$\overset{1}{\smile} . \overset{1}{\smile} = \overset{2}{\smile}$$

Se dispensant du *Res in Rem...* et des comptines cossiques, le système bombellien s'ouvrait donc en même temps aux privilèges du calcul automatique.

La représentation de la Chose y était par contre plus problématique : certes, la mise en regard des signes $\overset{2}{\smile}$ et $\overset{1}{\smile}$ indiquait bien la représentation d'un prédicat commun, dont le signe était $\smile$, et qui ne pouvait donc être que celui de la substance. Un bref examen montre cependant les limites et les insuffisances de cette représentation : le système ne permettait pas en effet d'utiliser une autre inconnue. Si, à l'inconnue représentée par le Creux, on avait voulu substituer en une autre, avec pour signe la Lettre A, comme chez Viète, ce que nous abrégeons en :

$$\smile \rightarrow A$$

alors le système de Bombelli ne le permettait pas. Bombelli avait certes perçu la nécessité de faire intervenir aussi le prédicat substantiel, mais il ne tenta aucunement d'en analyser la nature avec précision; il en fournit, en conséquence, une représentation largement insuffisante. En vérité, comme celui de Diophante ou Stiefel, le système de Bombelli, archaïque sur ce point, n'autorisa la représentation des puissances que d'une espèce seulement. Avec les progrès de la théorie des équations cependant, l'impossibilité de changer d'inconnue était devenue au XVI^{e} siècle une insuffisance majeure. Cette inadéquation, jointe à d'autres, ci-dessous étudiées, firent que le système de Bombelli ne survécut pas à son auteur. Il fut cependant en vérité représentatif, aux XVI^{e} et XVII^{e} siècles, d'une très large classe de tentatives voisines, également sans descendance, analysées par Cajori [24], telle celle de Stevin, où l'on trouve par exemple cette Forme :

$$2 ③ + 8 ② - 24 ① - 96$$

[24] Cf. CAJORI, I, 343-344 : *Notations [sq. for powers] applied to an un unknown quantity, the base being omitted.* Cajori semble considérer que chez Bombelli, la "base" (*i.e* approximativement : la substance) a été omise ; la situation est en réalité moins simple.

qui devait être interprétée comme : deux cubes, plus huit quarrés, moins vingt quatre choses, moins quatre vingt seize unités [25]. Dans tous ces systèmes donc, le prédicat relationnel avait été correctement analysé et symbolisé, cependant que la représentation de la Chose, avait été, dans les faits, soit intégralement ignorée comme chez Chuquet [26], soit, comme chez Bombelli ou Stevin, réalisée de façon inadéquate.

8.6. Le système de Viète.

En 1591, une vingtaine d'années après l'*Algebra* de Bombelli, Viète, dans son *Introduction à l'Art Analytique*, se consacra à son tour à la représentation des puisssances. Sa réflexion, appuyée sur une critique en règle des systèmes antérieurs et particulièrement cossique, que nous avons analysée dans une autre publication [27] dont nous résumons ici quelques conclusions, le conduisit à l'élaboration d'une doctrine authentique, véritable hypostase de l'homogénéité [28]. Viète s'avisa d'abord de distinguer, dans la représentation, deux caractères qui étaient confondus avant lui : le genre et la scalarité. Le *genre* d'une grandeur caractérisait son "Espèce" (*Species*) : grandeur simple, ou ligne, représentée par une Lettre seule, telle A ou E ; ensuite d'une grandeur carrée - ou "plane" -, représentée par E p (*i.e* E *Planus*, c'est-à-dire E est une

---

25 $2.x^3 + 8.x^2 - 24.x - 96$, en termes post-cartésiens. L'exemple est extrait de la Question XX (page 98) du *Premier Livre d'Arithmétique* de Diophante, dans la traduction et le commentaire de Stevin. Edition des Oeuvres mathématiques de Stevin (Leyde, 1634). On trouvera en annexe un *fac simile* commenté du problème complet.

26 Dans le manuscrit du *Triparty en La Science des Nombres* (1484), Chuquet introduisit un des premiers sytèmes symboliques neufs, depuis celui de Diophante, et aussi relativement cohérent, en particulier le premier exposant de l'histoire des mathématiques; on en trouvera le détail dans CAJORI, I, 103. Chuquet note par exemple

4^5 pour ce qui s'écrira

$4.x^5$ en notations cartésiennes.

L'ouvrage, qui ne fut jamais imprimé, était à peu près inconnu des géomètres du XVII^e siècle, et le manuscrit remis au jour, au XIX^e siècle seulement, par A. Marre. On le trouve aujourd'hui à la Bibliothèque Nationale, au Fonds Français (n° 1346).

En dépit des commentaires dont le *Triparty* fit l'objet au XVI^e siècle, en particulier dans l'*Arithmétique* d'Etienne Delaroche (Lyon, 1520), le système de Chuquet n'eut aucune descendance. Il constitua dans les faits un exemple limite : s'il représentait parfaitement la relation, il ignora en effet complètement la substance.

27 *La Question de la Chose. Mathématiques et écriture symbolique*. op. cit.

28 Chapitre III : *De la Loy des Homogènes, ensemble des genres et degrés des grandeurs comparées*, in *Isagoge*, op. cit, 22.

grandeur- carrée), etc [29]... Sa doctrine sur ce point fut désignée par Viète comme la (ou le) Logistique Spécieuse, c'est-à-dire le traitement des Espèces. D'un autre côté, il y avait la *scalarité* d'une grandeur, ou encore, en termes modernes, la puissance à laquelle elle se trouve élevée : carré ou cube par exemple, d'une grandeur qui serait elle-même une ligne : A *quadratus* ou A *cubus* , abrégés en A_q ou A_c. Nous revenons ci-dessous sur ce que nous appelons le Suffixe. Dans une autre étude, nous avions précédemment fait observer [30] que, dans les faits, la démarche de Viète se résuma à mettre en forme symbolique une distinction entre "l'inconnue-carrée" et "le carré de l'inconnue". Naturellement, si on pouvait, chez Viète, multiplier *ad libitum,* on ne pouvait ajouter entre elles que des grandeurs homogènes en un certain sens : A *planus* et C *quadratus* par exemple, pour obtenir:

A_p et C_q ($A + C^2$ en termes cartésiens).

Ainsi Viète mit-il en préalable à son *Isagoge* sous le titre "De la loy des Homogènes, ensemble des genres et degrés des grandeurs comparées" [31], une batterie de règles impératives, dont voici les deux premières :

> 1. Les Homogènes soient comparés aux Homogènes.
> Car les choses Hétérogènes, en quelque façon qu'elles soient affectées entre elles, ne peuvent être connues, comme disait Adraste.
> 2. Si une grandeur est ajoutée à une grandeur; celle-ci est Homogène à celle-là et au tout.

Une distinction qu'on peut rétrospectivement regarder comme aussi conceptuellement parfaite que mathématiquement sans intérêt. L'introduction, du fait de Descartes, d'une "unité des unités" (en termes modernes, l'élément unité du corps des nombres réels), priva en effet de toute pertinence mathématique la distinction entre scalarité et genre. Et cette partie de l'oeuvre de Viète, si elle fut épistémologiquement capitale, ne trouva en effet aucune descendance en mathématiques. Ainsi, la division scalarité / genre, ne se posant désormais plus depuis l'intérieur des mathématiques, aura par contre été un point de clivage historique obligé entre mathématiques (la scalarité) et physique (le genre).

---

29 idem, p 27 : P: Plan, S: Solide, PP: Plan-Plan, PS: Plan-solide, SS : Solide-Solide, PPS: Plan- plan-solide, PSS: Plan-solide-Solide, SSS : Solide-solide-solide.

30 SERFATI, *Naissance...*, op. cit, 59-60. Aussi *La question...*, op. cit, 316-319.

31 *Isagoge*, op.cit, chapitre III, 22.

Quoiqu'il en soit aujourd'hui de ces conclusions rétrospectives, Viète se trouvait, quant à lui, en devoir d'inscrire la représentation des puissances dans le cadre de son double registre, scalarité et genre. Dans le droit-fil de ses positions, on notera d'abord cette extension, commune aux deux registres : tout ce qui avait jusque là concerné le Requis, c'est-à-dire les puissances des inconnues, se trouva désormais étendu par Viète, à celles des données. Cette très importante innovation, aussitôt spontanément reprise par ses successeurs, Descartes en particulier, passa pourtant presque inaperçue, tant elle semblait aller de soi dans la combinatoire nouvelle des Lettres, simple application aux espèces de puissances de la pratique de Viète de l'écriture de l'Indéterminé. En conséquence, utilisant des Consonnes, la méthode permettra désormais l'écriture de Formes comme B *quadratus* ou F *Solidus* par exemple, interprétées respectivement comme le carré d'une grandeur fixe arbitraire, de signe B, ou comme une donnée quelconque du type "Solide", de signe F. Une procédure intégralement reprise dans la *Géométrie* par Descartes, dans le cadre de son propre système [32], avant de devenir chose commune chez les géomètres de la fin du XVII^e^ siècle, particulièrement chez Leibniz.

En ce qui concerne le *genre*, Viète fut conduit aux mêmes conclusions physiciennes que le cossique. Pour faire court, nous ne décrirons ici que le registre numérique de la *scalarité*. Sur ce point, Viète proposa des concaténations particulières : une Lettre majuscule, voyelle ou consonne, immédiatement suivie dans la Ligne d'un certain nombre de lettres minuscules juxtaposées, q ou c exclusivement, (q, c, qq, qcc,...),et que nous appelerons *Suffixe.* Par exemple :

Dq ou Aqqc, ou encore F

Dans cette représentation, achevée chez Viète, D ou A pouvait être elle-même le signe, non plus seulement d'une ligne, mais d'une grandeur de type Plan-Solide, ou bien Solide-Solide. Le Suffixe était ainsi une suite de longueur quelconque, éventuellement nulle, construite sur un alphabet à deux lettres seulement. Au déchiffrement, la présence du Suffixe indiquait sans

---

32 L'on y trouve des Formes comme k^4 et h^3, par exemple, où k et h sont les signes de *données* (A.T, VI, 420 et 421).

ambiguïté au lecteur une puissance d'espèce. La Lettre était alors interprétée comme l'espèce elle-même, c'est-à-dire un Indéterminé : Donné indéterminé ou Requis inconnu selon le cas. Le Suffixe enfin était à son tour interprété, à l'aide des codifications : *quadratus* pour q, *cubus* pour c. Ainsi

Dq

était-il interprété comme le Carré d'une grandeur donnée de signe D ; de même :

Aqqc

représentait une grandeur inconnue de signe A, élevée en "Quarré de quarré en cube" [33], c'est-à-dire en termes modernes, de rapport à l'unité égal à sept.

Contrairement à celui de Bombelli, le système de Viète avait donc correctement analysé le prédicat substantiel en la valeur d'un Indéterminé et l'avait en conséquence représenté au moyen d'une Lettre. Il permettait ainsi la représentation naturelle de plusieurs inconnues et aussi de plusieurs constantes, dont le nombre n'avait pour limite que celui des lettres, voyelles et consonnes, de l'alphabet. Dans l'exemple Aqqc ci-dessus en effet, la substitution

$$A \rightarrow E$$

fournit évidemment Eqqc.

D 'un autre côté, la présence du Suffixe indiquait que le système avait aussi pris en compte le prédicat relationnel. Contrairement à Bombelli, il n'en n'assurait cependant pas convenablement la représentation du rapport à l'unité, le moyen choisi par Viète en effet, un Suffixe littéral, étant mathématiquement fort peu opératoire. En vérité, si Viète avait bien perçu la nécessité du prédicat de la relation, il ne l'avait pas, comme chez Bombelli ou ultérieurement chez Descartes, analysé en la valeur d'un nombre entier et ne l'avait donc pas représenté par un Chiffre pur, mais par une suite de lettres. La multiplication de deux puissances d'une même espèce, Aqqc et Aqcq par exemple, demandait donc à nouveau le recours à des tables et des règles-comptines que Viète dut fournir à ses lecteurs [34], tout en les adaptant à longueur de pages à son nouveau système, et que le calculateur devait encore une fois apprendre par coeur. Une procédure lourde, héritée des cossiques, et dont le système contemporain de Bombelli s'était dispensé. Ceci condamna définitivement cet aspect de la représentation des puissances chez Viète.

---

33 VIETE, *Isagoge*, op. cit, 24.
34 VIETE, *Isagoge*, op. cit, 41. Cf. reproduction en annexe.

ANNEXE AU CHAPITRE 8

Annexe 1. Arithmétique chez Stevin.

QVESTION XX.

Trouvons un ◎ tel, que ſon quarré — 12 multiplié par le ſomme du double d iceluі ◎, & le quarré de — 2 & 4, le produict ſoit egal au quarré du produict de — 2 par icelui ◎ requis.

CONSTRVCTION.

Soit le nombre requis	1 ①	4
Son quarré 1 ②, auquel ajouſté — 12 faict	1 ② — 12	4
Qui multiplié par la ſomme du double du nombre requis, & le quarré de — 2 & 4, qui eſt par 2 ① + 8, faict	2 ③ + 8 ② — 24 ① — 96	64
Egal au quarré du produict de — 2, par 1 ① premier en l'ordre, qui eſt à	4 ②	

Leſquels reduicts, 1 ③ ſera egale à — 2 ② + 12 ① + 48; Et 1 ① par le 71 probleme, vaudra 4.

Je di que 4 eſt le nombre requis. *Demonſtration.* Le quarre de 4 eſt 16, qui avec — 12 faict 4, qui multiplié par 16 (16 pour la ſomme du double d'iceluy 4, & le quarre de — 2 & encore 4) faict 64, qui ſont egales au quarré du produict de — 2, par le 4 trouvé, ſelon le requis; ce qu'il falloit demonſtrer.

Extrait de la Question XX (page 98) du *Premier Livre d'Arithmétique* de Diophante, dans la traduction et le commentaire de Stevin. Edition des Oeuvres mathématiques de Stevin (Leyde, 1634). Comme chez Bombelli, Stevin n'assure pas la représentation de la Chose. L'énoncé, quasi-rhétorique et non délimité, est aussi extrêmement ambigu. A l'aide du texte symbolique, on le rétablit ainsi en termes post-cartésiens :

Trouver x tel que

$(x^2 - 12) (2.x + 8) = (-2 . x)^2$.

Stevin calcule d'abord :

$(x^2 - 12) (2.x + 8) = 2.x^3 + 8.x^2 -24.x - 96$.

Reste une équation cubique, équivalente à

$x^3 = -2.x^2 +12.x + 48$

dont Stevin vérifie manuellement que 4 est une solution. .

Première partie :
Le système.

Chapitre 9

Puissances. De Descartes à Leibniz.

9. Puissances. De Descartes à Leibniz.

9.1. Le système de Descartes.

9.1.1

Paru en 1591, l'*Isagoge* fit aussitôt l'objet, en ces premières années du XVII^e^ siècle, de commentaires et de traductions, comme celle de James Hume en 1636. Au même moment, au terme d'une laborieuse prise de conscience des inaptitudes essentielles du système cossique, la conception des lignées de puissances se modifiait chez les géomètres, chacun des nouveaux systèmes, comme le *Cursus Mathematicus* de Pierre Hérigone (1634), reconnaissant désormais la nécessité de prendre en compte deux prédicats. Ce fut néanmoins le système de Descartes qui fut adopté par la communauté, et qui demeure en vigueur encore aujourd'hui. Le système cartésien fut aussi chronologiquement le premier; il convient ici de redresser une erreur historique de Cajori [1]. Incontestablement en effet, la première apparition de l'exponentielle cartésienne pour les puissances figure dans la Règle XVI des *Regulae* [2], et non dans la *Géométrie* de 1637. Or, s'il est quelques controverses sur la datation du Livre II des *Regulae,* les commentateurs s'accordent néanmoins sur 1628 -avant le départ en Hollande- comme la date la plus tardive pour la rédaction de la Règle XVI [3]. En conséquence, et contrairement à ce que croit Cajori, qui semble ignorer les *Regulae,* l'invention de Descartes précéda celles de Hérigone et Hume, de 1634 et 1636 respectivement, qu'on peut en première analyse, considérer comme voisines. En un temps second, le système cartésien s'appliqua complètement, dans le détail, dans la *Géométrie* de 1637. Nous décrirons plus longuement au chapitre 10 (*Descartes et l'écriture symbolique mathématique)* les conditions historiques de cette genèse, et nous consacrererons ici à ses seuls aspects épistémologiques.

Dans sa version originale, le système symbolique cartésien se constitua autour de trois représentations: une Lettre, une position, et un Chiffre pur. Si la Lettre était inscrite sur la Ligne, une position nouvelle était créée, au-dessus et à droite de la Lettre, qu'un Chiffre pur venait occuper, comme dans :

$$a^3 \qquad \text{ou } x^2$$

1 CAJORI, I, 346.

2 *Regulae,* op.cit, 455, 16.

3 Cf. notre analyse dans SERFATI, *Regulae et mathematiques* , op.cit, 90 - 91. Aussi WEBER J.P, *La constitution du texte des Regulae.* Paris. SEDES.1964, 142-143. Voir également RODIS-LEWIS G., *L'Oeuvre de Descartes,* op.cit, 89- 98.

Au déchiffrement, la seule présence de la position haute indiquait l'emploi du système cartésien pour représenter les lignées de puissances. Ce fut une remarquable nouveauté combinatoire que cette ouverture du texte, en dehors et au-dessus de la Ligne. A la manière de Viète, avec toutefois une Clé différente [4], la Lettre était interprétée comme la Chose inconnue ou le Donné indéterminé sous-jacent, et le Chiffre comme un nombre entier, représentant la puissance, ou rapport à l'unité. Ainsi, en première analyse, l'interprétation de a^3 était-elle simplement : "une grandeur donnée arbitraire, de puissance égale à trois".

Dans la représentation d'une puissance, le système cartésien apportait donc avec lui une première innovation : il était le premier à regarder à la fois la substance comme une grandeur indéterminée et la relation comme un nombre entier. Si simple qu'elle nous apparaisse aujourd'hui - au point qu'on serait tenté de parler ici de "véritable" nature des prédicats - cette conception avait pourtant manqué chez Bombelli et Viète. Le système de Viète en effet, avec son Suffixe, n'avait pas reconnu que la relation pouvait s'analyser en un prédicat numérique et celui de Bombelli, et son Creux, n'avait pas davantage considéré que la Chose pouvait être décrite comme une grandeur indéterminée.

En fait, ni le statut de la relation chez Viète, ni celui de la substance chez Bombelli n'avaient été clairement élucidés par leurs auteurs, c'est-à-dire définis dans le cadre de concepts préexistants. En vérité, cette problématique même du statut n'avait été aucunement perçue par les géomètres. Pas davantage que ne l'avait été l'origine de leurs représentations symboliques : Suffixe et Creux apparaissent ainsi aujourd'hui, non seulement comme des signes figurés, c'est-à-dire étrangers au corpus préexistant, mais surtout les représentations symboliques d'entités qui n'avaient pas elles-mêmes été véritablement définies. Sur ce point, la conception de Descartes, longuement mûrie dans la Règle XVI, était au contraire simple : deux concepts préalables intervenaient et deux seulement, et tous deux clairement définis en termes mathématiques préexistants : une grandeur indéterminée et un nombre entier. Dès lors, Descartes se devait d'assurer leurs représentations conformément au système symbolique préexistant : une Lettre pour la grandeur, un Chiffre pur pour le nombre. Une symbolisation simple, que ni Bombelli ni Viète n'avaient pourtant su établir.

4 Une lettre minuscule, soit du début, soit de la fin de l'alphabet.

Restait la représentation de la liaison entre les prédicats. Car, sur le plan des significations, il était en effet, désormais, non plus deux, mais trois aspects, à prendre en compte : en premier lieu évidemment, les deux prédicats ou concepts primitifs, Chose et relation, mais aussi la façon dont ils étaient mutuellement organisés pour précisément créer une puissance et non un autre concept. L'opération en jeu est ici l' "élévation de puissance", que nous dirons plus simplement la Puissance (anachroniquement, l'exponentiation). Qu'il ait été nécessaire de rendre compte de ce que Chose et relation n'étaient pas seulement abstraitement liées, mais participaient à la construction bien identifiée d'une Puissance d'espèces, nous semble aujourd'hui rétrospectivement évident. Dans l'écriture rhétorique cependant, les deux prédicats étaient simplement reliés par la copule universelle *de*, comme dans l'exemple initial : la troisième puissance *de* la grandeur indéterminée de signe a. Dans l'écriture symbolique au contraire, chacun des prédicats étant désormais représenté par un signe mathématique préexistant, la Puissance devra l'être par un signe spécifique, ou une disposition graphique inédite. Comme on a vu, ce sera, chez Descartes, la position haute qui remplira cette fonction. Ainsi découvre-t-on ici une différence structurelle majeure dans les constitutions respectives d'une phrase rhétorique et d'une forme symbolique.

Dans les formes post-cossiques, mais néanmoins archaïques, de la représentation, comme chez Viète et Bombelli, la Puissance n'avait pas été représentée en tant que telle, mais indiquée sans ambiguïté au lecteur par la présence de Figures inédites pour les charactères des prédicats. Ainsi, chez Bombelli, la seule présence du Creux indiquait-elle au lecteur une Puissance, le signe, très spécifique, n'étant utilisé qu'à cette occasion; la disposition graphique imbriquée achevait d'assurer la représentation de la Puissance, sans signe supplémentaire; de même, chez Viète, par le seul Suffixe, exclusivement formé des lettres q et c.

9.1.2 La fin du cossique.

Conjuguant donc les avantages de ceux de Viète et de Bombelli, le système cartésien se dispensait aussi de leurs inconvénients respectifs. Son avènement signa la disparition de la symbolique diophanto-cossique qui, des siècles durant, avait gouverné la pensée mathématique sur la question des puissances. Avec lui disparurent ses principales limitations. Se substituèrent aux comptines, des formules additives simples sur les nombres entiers, déployées à longueur de pages dans la *Géométrie*. Ainsi, la seule considération du canon :

$$x^1 . x^1 = x^2$$

dispensa désormais du *Res in Rem*..., comme cela avait déjà été le cas chez Bombelli [5]. D'un autre côté, le système cartésien permit, comme chez Viète cette fois, la désignation d'une seconde inconnue, supprimant ainsi l'autre inconvénient cossique majeur. En effet, en substituant

$$x \rightarrow y$$

dans x^2, on obtient évidemment y^2. Le nombre d'inconnues susceptibles d'être désignées sera ainsi seulement limité par celui des lettres de l'alphabet, un avantage à porter au compte de l'analyse de la Chose en terme d'Indéterminé, directement inspirée de l'oeuvre de Viète. Il nous paraît ici que Descartes avait lu Viète, quoiqu'il en ait dit [6].

Dans ces conditions donc, la mise en regard de ces deux assemblages cartésiens

$$a^2 \quad \text{et} \quad a^3$$

s'interprètera comme le carré et le cube d'une même grandeur et celle de :

$$a^2 \quad \text{et} \quad b^2$$

indiquera deux grandeurs distinctes, mais de même espèce, celle des carrés. Nous dirons qu'on a envisagé la dépendance de l'assemblage cartésien, soit par rapport à la Lettre, soit par rapport au Chiffre, un examen qui permet de distinguer immédiatement à la fois le semblable et le différent. Si simple et nécessaire qu'elle nous apparaisse aujourd'hui, cette faculté est apparue seulement avec le système cartésien. Nous terminerons par un exemple de la *Géométrie* [7], où on observera deux signes d'inconnues à l'oeuvre et aussi, *in statu nascendi*, l'agilité du calcul exponentiel :

---

5 Les comptines furent abandonnées sans regret au profit de la table d'addition des entiers, illustrant ainsi notre conception collective implicite de la primauté du Nombre : tout comme les comptines en effet, la table d'addition demande un effort important de mémorisation. C'est cependant l'apprentissage de la table que nous privilégions comme naturel.

6 Les relations de Descartes avec l'oeuvre de Viète furent empreintes d'ambiguïté. Voir notre analyse ci- dessous en 10.1.

7 A.T, VI, 420.

Tout de mesme, la seconde equation trouuée cy dessus, a sçauoir :

$$y^6 - 2by^5 \left.\begin{matrix} -2cd \\ +bb \\ +dd \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +4bcd \\ -2ddv \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} -2bbcd \\ +ccdd \\ -ddss \\ +ddvv \end{matrix}\right\} yy - 2bccddy + bbccdd,$$

doit auoir mesme forme que la somme qui se produist, lorsqu'on multiplie

$$yy - 2ey + ee$$

par $y^4 + fy^3 + ggyy + h^3y + k^4$,

qui est

$$y^6 \left.\begin{matrix} +f \\ -2e \end{matrix}\right\} y^5 \left.\begin{matrix} +gg \\ -2ef \\ +ee \end{matrix}\right\} y^4 \left.\begin{matrix} +h^3 \\ -2egg \\ +eef \end{matrix}\right\} y^3 \left.\begin{matrix} +k^4 \\ -2eh^3 \\ +eegg \end{matrix}\right\} yy \left.\begin{matrix} -2ek^4 \\ +eeh^3 \end{matrix}\right\} y + eek^4;$$

9.1.3 Les *Regulae* et la création du système.

Le système cartésien apportait donc ces deux innovations symboliques : d'une part la double représentation par Chiffre et Lettre, d'autre part la position haute. Il est cependant clair que l'objectif premier de Descartes ne visait que la seule double représentation : Chose et relation, conformément aux principes généraux des *Regulae* d'une distinction rigoureuse entre les prédicats. On pourrait objecter que le texte de la Règle XVI est fort embarrassé, au moment où le Chiffre vient remplacer le cossique dans la création de l'exponentielle [8] :

> "J'avoue que ces noms m'ont moi-même trompé pendant longtemps [sq ; la racine, le carré, le cube, le bi-carré, *i.e* les noms des espèces cossiques] : en effet rien ne me semblait pouvoir être plus clairement proposé à mon imagination, après la ligne et le carré, que le cube et d'autre figures forgées à leur ressemblance ; et certes je n'ai pas peu résolu de difficultés par leur secours. Mais enfin après de nombreuses expériences, j'ai compris que je n'avais rien trouvé par cette manière de concevoir, que je n'eusse pu reconnaître beaucoup plus aisément et plus distinctement sans elle (...)."

Nous résumons alors ici ce que nous avions ailleurs détaillé [9]. Pour Descartes, la difficulté était sur ce point d'ordre supérieur : le cossique avait privilégié une vision physique du

8 *Regulae,* op.cit, 73-74. Règle XVI, 456, 16-25.
9 SERFATI, Regulae *et mathematiques,* op.cit, 82-83 .

monde, par le moyen d' "espèces", une conception que Viète avait reprise à sa façon, par le moyen de sa description en partie double, scalaire et genre, par nous schématisée ci-dessus en les points de vue "mathématique" et "physique". S'adressant au Descartes des *Regulae*, dont l'objectif ultime était en fait celui d'un "physicien" (Y. Belaval), l'argumentaire de Viète à l'effet de promouvoir deux registres descriptifs juxtaposés ne pouvait donc manquer d'être fort convaincant. Or, par la Règle XVI, Descartes ramenait à nouveau une seule description sur le terrain, à propos d'une réalité que lui-même envisageait pourtant sous deux aspects irréductibles, mathématique et physique. Dans les faits, Descartes fut pris entre l'efficacité mathématique qui gouvernait l'ensemble des *Regulae*, et les nécessités de la physique, prééminentes dans le livre II. L'arbitrage cartésien final, en faveur des mathématiques, pour difficile à soutenir qu'il fut dans les *Regulae*, se trouva ensuite aisément assumé dans la *Géométrie*.

9.2. Concepts composés.

Il aura été indispensable à l'avancement de la mathématique de représenter la lignée au moyen de deux signes, et non d'un seul : ainsi résumons-nous la leçon de cette première partie de l'histoire des puissances. Des siècles durant cependant, cette nécessité n'était pas apparue. La pratique des équations cubiques au XVI^{e} siecle, se heurta aux insuffisances et aux limitations de la représentation cossique, spécialement par l'impossibilité de désigner une autre inconnue à l'intérieur du système. Les géomètres prirent alors peu à peu confusément conscience que ce concept de puissances, si familier pourtant, recelait en fait deux prédicats distincts, irréductibles l'un à l'autre. N'utilisant qu'un seul signe, le cossique n'avait pu représenter les deux concepts constitutifs. Il n'y prétendit d'ailleurs pas ; étant simplement le fruit d'une réflexion naïve, il n'en représenta en fait aucun. La règle simple, en forme d'inventaire, lui suffisait, par quoi le géomètre assignait chaque fois un signe unique nouveau à chaque concept nouvellement apparu.

Devant les incontestables inconvénients mis à jour cependant, tous les nouveaux systèmes, au début du XVII^{e} siècle, se proposèrent de prendre cette fois en compte les deux concepts. D'un autre côté, les systèmes nouveaux différèrent entre eux, à la mesure de la finesse de l'examen des concepts constituants, spécifique de chaque géomètre. Bombelli analysa la relation comme un concept mathématique préexistant, tout comme Viète pour la Chose. Par contre, tant le Suffixe chez Viète, que le Creux chez Bombelli témoignèrent d'une analyse extra-mathématique des prédicats, et, à vrai dire, bien peu élaborée. Les inconvénients de ces deux systèmes entraînèrent aussitôt leur abandon.

Quel que fut cependant le système nouveau, il était désormais trois aspects à prendre en compte, les deux prédicats et la façon dont il étaient mutuellement organisés pour précisément créer une Puissance. Cette loi de leur organisation, immanente au concept de lignée, devait rendre compte du fait que Chose et relation n'étaient pas seulement mises en liaison abstraitement, mais participaient à une construction désignée. D'un autre côté, dans l'écriture symbolique, les deux prédicats étant symbolisés par des signes spécifiques - les charactères -, la loi devait l'être par un autre signe ou disposition graphique, appelé ici la "composition", tel le Creux chez Bombelli, le Suffixe chez Viète, la position haute chez Descartes. Si la syntaxe précise de chaque composition dépendit de la spécificité du système dont elle relevait, elle servirent toutes à la reconnaissance des charactères dans le texte symbolique, et à leur mise en relation. A la fin, l'ensemble, charactères et composition, exprimait la représentation symbolique de la lignée, c'est-à-dire le concept visé. Chez Viète et Bombelli, la composition ne fut pas représentée *per se,* mais indiquée sans ambiguïté par des signes inédits pour les charactères.

Ces diverses solutions à la représentation de la Loi nous paraissent rétrospectivement un mélange des genres : elles faisaient en effet porter sur les charactères, c'est-à-dire sur la représentation des prédicats, tout le poids de celle de l'organisation. Ceci demeura néanmoins possible tant que les charactères furent des Figures, c'est-à-dire des signes extra-ordinaires, c'est-à-dire en même temps, tant que demeura problématique, comme chez Bombelli ou Viète, le statut de l'un des prédicats constitutifs. Bien évidemment, toutes ces considérations, tant sur le plan des significations que combinatoire, n'avaient pas eu lieu d'être à propos d'un concept simple.

Lorsque Descartes s'avisa que les deux concepts primitifs pouvaient eux aussi être analysés en termes mathématiques préexistants, Indéterminé et Nombre, il leur assigna en même temps, comme charactères respectifs, une Lettre et un Chiffre, c'est-à-dire la matière ordinaire dont était tissé le texte symbolique. Dès lors, le choix du signe pour la composition entre les charactères, c'est-à-dire de la représentation de leur loi, redevenait une question entière, Descartes la représentant par un signe neuf, la position haute, soumis à une syntaxe combinatoire *sui generis.*

Déployant ainsi des avantages structurels 211
incontestables sur tous les systèmes existants, l'exposant de Descartes

envahit alors l'Europe [10]. C'est donc lui qui, au début du XVII^e^ siècle, vint mettre un point final à une antique question. Et les modalités du dénouement valurent pour leçon de méthode, particulièrement chez Leibniz (Cf. chapitre 12 : *Charactéristique et Nouveau Calcul chez Leibniz).*

9.3 De Descartes à Leibniz : le triomphe de la substitution.

9.3.1. L'impossible substitution dans les systèmes cossique et Bombellien.

Les prolongements qu'apportèrent à son exponentielle les successeurs de Descartes allaient grandement dépasser les intentions primitives de son auteur ; pour mieux comprendre ceci, il nous faut d'abord retourner à l'équation du quatrième degré [11] de Stiefel, dans la section 8.3.

Le fond de la méthode avait consisté en ceci, que nous exposons rhétoriquement : étant donnée une certaine équation (E) du second degré :

ʒ + 2e. égal à 5550 (3),

satisfaite par une grandeur inconnue, trouver une équation vérifiée par une grandeur égale à la précédente inconnue, à laquelle s'ajoutent son propre carré, et l'entier de signe 2. Cette technique, bien particulière, dite de changement d'inconnue [12] se sera révélée absolument nécessaire à la résolution. En termes modernes, il s'agit d'examiner l'équation (E) ci-dessus et, sans l'avoir nécessairement résolue, d'y effectuer la substitution :

2e. ⟶ ʒ + 2e. + 2

Ainsi la résolution effective comporte-t-elle une suspension de fait de la procédure inquisitoriale initiale, et sa "métamorphose", comme dira Leibniz [13]. Le tout sur un mode

10 L'avenir du système cartésien après Descartes est analysé au chapitre 11.

11 Donnés ici pour la clarté de l'exposé au lecteur moderne, les termes de "quatrième degré" et "second degré " sont évidemment anachroniques chez Stiefel.

12 Ici, dans un cas particulier.

13 Le jeune Leibniz désignait ainsi ce que nous appelons aujourd'hui des changements de variable. Ainsi dans M.S, V, 89, déclare- t-il, non sans une certaine forfanterie, que, si la "Métamorphose" qu'il a proposée l'a effectivement conduit à résoudre la question [sq. de la Quadrature Arithmétique du Cercle], il en avait préalablement trouvé et essayé une multitude d'autres : "Pour cet effet, j'ai fait le
212 dénombrement de quantités de Métamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison très aisée (car je pourrais par ce moyen écrire en une heure de temps une liste de plus de 50 figures planes ou solides,

hypothétique : on ignore ce que vaut "la" solution de l'équation initiale, mais si on la connaissait, l'inconnue nouvelle vérifierait une seconde équation, qu'il faut écrire; telle est la simple idée mathématique ici en application. Et, sans aucune exception, toutes les techniques de résolution des équations des troisième et quatrième degrés que, de del Ferro à Bombelli, en passant par Cardan, le XVI^e^ siècle développa si largement, utilisèrent ce principe des changements d'inconnues, adaptés toutefois à chaque cas [14].

Dans la résolution par Stiefel de sa propre question, on a alors déjà observé ceci : s'il appliqua sans conteste le changement d'inconnues, il n'en expliqua aucunement le principe, ni sous forme rhétorique, ni symboliquement. Une absence rhétoriquement bien regrettable, le texte étant tout à fait abrupt. Ni Stiefel, ni les Italiens, ne parvinrent en fait à décrire convenablement la pratique du changement d'inconnue en termes rhétoriques, ce qui leur eut pourtant été possible en se contraignant à expliciter avec précision l'ordre d'exécution des instructions. Pour nous faire plus clairement comprendre du lecteur moderne sur ce point, nous avons nous-mêmes été contraints, en 8.3, d'utiliser anachroniquement le système de Descartes. Quant à exprimer symboliquement le changement d'inconnue, Stiefel se trouvait ici, on l'a dit, devant une impossibilité absolue : le système cossique pouvait bien écrire la nouvelle inconnue, il ne *disposait pas des moyens d'en représenter le carré.*

En vérité, un tel changement d'inconnue ne pouvait être *pensé* depuis l'intérieur du cossique, ce que le système de Bombelli ne permettait pas davantage. Etait inconcevable chez Bombelli la désignation d'une seconde inconnue, selon la substitution:

$$\overset{1}{\smile} \longrightarrow A$$

Le changement d'inconnue de Stiefel *supra*, caractérisé en termes bombelliens par :

---

différentes, et néanmoins dépendantes de la circulaires) j'ai trouvé bientôt le moyen que je m'en vais vous expliquer."

Ce texte manuscrit d'une lettre en français est une adresse, non datée, à l'Editeur du *Journal des Savants,* relativement à la découverte - qu'il fit à Paris - de la Quadrature Arithmétique du Cercle. La méthode de Leibniz consiste à essayer toute une classe de changements de variables, exhaustivement et aveuglément, c'est-à-dire par substitution systématique de lettres, initialement en dehors de tout souci de signification, jusqu'au moment où, si c'est possible, il s'en trouve un qui convienne. La méthode qu'expose Leibniz est donc strictement combinatoire, au sens que lui-même donnera ultérieurement au terme. Elle présente un double intérêt : d'une part, ce fut la première apparition chez Leibniz d'un emploi effectif (et remarquablement efficace !) de sa Combinatoire. Ce fut aussi la toute première fois qu'en mathématiques, semblable démarche épistémologique fut ainsi éprouvée.

14 Les équations nouvelles ainsi obtenues furent ultérieurement appelées *résolvantes.*

$$\overset{1}{\smile} \longrightarrow (\overset{2}{\smile} + \overset{1}{\smile} + 2),$$

était ainsi *a fortiori* impossible, toujours pour la même raison : le carré ne pouvait en être écrit. Le système de Bombelli ne permettait en fait aucune substitution au lieu du Creux. Insistons à nouveau sur ce point, évoqué en 8.3, en nous différenciant ici de l'analyse de Cajori [15]: les systèmes de Stiefel et Bombelli n'interdirent pas seulement l'emploi d'une seconde (ou troisième, ou quatrième...) inconnue dans le calcul, une insuffisance potentiellement réparable en multipliant simplement les symboles, mais proscrivirent aussi l'emploi d'inconnues nouvelles, dès lors qu'elles étaient liées à la première au moyen des puissances (Carré ou Cube par exemple), et donc, qu'elles pouvaient elles-mêmes être représentées au moyen des signes nouvellement apparus,comme dans :

$$\overset{2}{\smile} + \overset{1}{\smile} + 2$$

C'est dire qu'était interdite par le système symbolique la répétition du processus même qui avait servi à le constituer. Ces systèmes découvraient donc un handicap structurel même par rapport à l'écriture rhétorique qu'ils étaient pourtant censés abréger et traduire, et dans laquelle le carré en question pouvait au moins être énoncé.

9.3.2. Substituabilité chez Viète et Descartes.

9.3.2.a Le succès.

Les systèmes de Viète et de Descartes allaient permettre au contraire les substitutions et leur interprétation comme changement d'inconnues. Chez Descartes en effet, dès lors que le carré de x était écrit :

x^2,

le système pouvait d'abord représenter l'inconnue stiefelienne :

$x^2 + x + 2$, mais surtout, point crucial, le carré de celle ci, selon :

$(x^2 + x + 2)^2$,

par une succession d'exposants.

214 Dans ces conditions, l'équation (E) de Stiefel peut, elle aussi, être écrite comme :

---

15 *Signs for unknown numbers*, in CAJORI, I, 379-381.

$$E^2 + E = 5\,550$$

Restait à y effectuer le changement d'inconnue:

$$E \longrightarrow (x^2 + x + 2),$$

une substitution désormais effectuable; l'équation de Stiefel aurait ainsi finalement trouvé cette apparence cartésienne:

$$(x^2 + x + 2)^2 + (x^2 + x + 2) = 5\,550$$

Une analyse semblable montre que le système de Viète aurait aussi convenu : la Lettre voyelle A dénotant en effet l'inconnue initiale, la nouvelle inconnue se serait écrite:

Aq + A + 2, et son carré:
(Aq + A + 2) q ,

au moyen cette fois, de Suffixes successifs. Dans les mêmes conditions, l'équation (E) de Stiefel aurait pu être écrite :

Eq + E aeq. 5 550

Et, par la substitution :

E $\longrightarrow$ (Aq + A + 2),

il serait finalement venu :

(Aq + A + 2)q + (Aq + A + 2) aeq. 5 550.

9.3.2.b. Analyse.

Le succès de Viète et Descartes était dû à une démarche commune : le prédicat de la Chose avait été non seulement analysé en terme d'Indéterminé, mais encore représenté au moyen d'une Lettre, c'est-à-dire un signe inséré dans le système combinatoire préexistant. Dès lors, tout changement d'inconnues pouvait se traduire combinatoirement par le remplacement de la Lettre par une Forme. Une réflexion qui nous paraît aujourd'hui aller de soi, mais qui ne fut adoptée par aucun des auteurs des deux systèmes qui la permirent. Considérant en fait que leur écriture de la Lettre avait délimité dans le texte un emplacement fixe et un seul, ni Viète, ni Descartes n'utilisèrent les possibilités de substitution dans leurs propres écrits, une faculté largement utilisée au contraire par leurs successeurs (Cf. ci-dessous chapitre 11 *L'exponentielle après Descartes*). Ainsi, aucune superposition de Suffixes ne peut être relevée dans l'*Isagoge*. Plus surprenant encore, la *Géométrie* ne porte aucun exemple comme : 215

$$(y - 3)^2$$

Cette absence est significative des limitations que Descartes apporta à l'emploi de son propre système pour les puissances [16]. Descartes se refusait ainsi à la substitution :

$$x \rightarrow (y - 3)$$

au lieu de la Lettre x, dans l'assemblage :

$$x^2$$

D'un autre côté, il fut parfois indispensable que Descartes ait naturellement à manipuler dans la *Géométrie* ce qui s'exprimait rhétoriquement comme le "carré de (y - 3)", quantité véritablement très usuelle. Faute de vouloir l'écrire, Descartes en fut alors réduit, comme tout à l'heure Stiefel - qui, lui, n'avait pu faire autrement - à en donner seulement l'expression développée par le calcul, c'est-à-dire à s'extraire du registre symbolique. De là, dans le texte de la *Géométrie*, de surprenantes considérations rhétoriques, quatre lignes bien embarrassées [17], auxquelles Descartes s'était lui-même contraint :

> "... en sorte que $y - 3$ est égal à x & et au lieu d'$x\,x$, il faut mettre le carré d'$y - 3$, qui est $y\,y - 6y + 9$; et au lieu d'x^3, il faut mettre son cube, qui est $y^3 - 9\,y\,y + 27\,y - 27$; & enfin, au lieu d'x^4, il faut mettre son quarré de quarré, qui est $y^4 - 12\,y^3 + 54\,y\,y - 108\,y + 81$."

On conçoit que le Livre III de la *Géométrie*, qui traite des racines des équations et de la divisibilité des polynômes, prenne parfois, de ce fait, des allures un peu étranges. A notre sens, la complète absence dans la *Géométrie* d'expressions où l'exponentié est une Forme, s'analyse rétrospectivement comme une lacune chez Descartes, sans doute la plus sérieuse des limitations aux capacités inventives de la *Géométrie*, par ailleurs un ouvrage très profondément novateur en ce début du XVII^e siècle [18].

---

16 On tâchera de l'expliquer doublement, à la fois sur le plan signifiant et sur le plan symbolique. En premier lieu, le sujet ne s'y prêtait pas. La substitution formelle était à cette époque interprétée par changement d'inconnues, dans le but de rechercher, comme chez Cardan, les solutions d'une équation. Or, ce n'était aucunement un sujet abordé dans la *Géométrie*. La seconde raison était déjà à l'oeuvre chez Viète : l'écriture de la simple puissance d'un binôme, comme $(x + 3)^2$, requérait des Délimitants (parenthèses), ce à quoi Descartes répugna toujours, tout comme Viète.

17 A.T, VI, 447.

216 18 On trouvera en annexe un extrait *fac simile* du Livre III de la *Géométrie*, A.T, VI, 449, sur la transformée d'une équation du quatrième degré par $z - 4 = y$, avec le jeu corrélatif sur les exposants, dispensant des comptines. Jamais néanmoins Descartes n'y écrit $(z - 4)^2$ par exemple.

ANNEXE AU CHAPITRE 9

Annexe 1 . Agilité exponentielle dans la *Géométrie.*

$$y^4 + 16y^3 + 71yy - 4y - 420 \propto 0,$$

ayant diuisé 16 par 4, a cause des 4 dimensions du terme y^4, il vient derechef 4. C'est pourquoy ie fais $z - 4 \propto y$, & i'escris

$$\begin{array}{rrrrr} z^4 - 16z^3 & + \; 96zz & - \; 256z & + \; 256 \\ + \; 16z^3 & - \; 192zz & + \; 768z & - \; 1024 \\ & + \; 71zz & - \; 568z & + \; 1136 \\ & & - \; 4z & + \; 16 \\ & & & - \; 420 \\ \hline z^4 \quad * & - \; 25zz & - \; 60z & - \; 36 \propto 0; \end{array}$$

Transformée d'une équation du quatrième degré par $z - 4 = y$, avec jeu sur les exposants, in Livre III de la *Géométrie* , A.T, VI, 449. Les règles additives, telles $z.z^2 = z^3$ sont bien en place, dispensant donc des comptines. Descartes cependant, qui se refuse à toute substitution dans son exponentielle, n'écrit jamais $(z- 4)^4$ par exemple.

9. Puissances. De Descartes à Leibniz.

Première partie :
Le système.

Chapitre 10

Descartes

et

l'écriture symbolique mathématique.

X - 2

10. Descartes et l'écriture symbolique mathématique.

220

10.1 Des *Cogitationes Privatae* aux *Regulae*. Le jeune Descartes.

Les textes de jeunesse, tels les *Cogitationes Privatae* de 1619-1621 [1], démontrent la réelle familiarité de Descartes avec le système cossique, et l'usage constant de ses signes pour l'Inconnu d'une part, le Carré ou le Cube d'autre part [2]. La pratique cartésienne était certes dérivée de l'*Algebra* de Clavius, un ouvrage de référence majeur à La Flèche. Descartes utilisa cependant un système cossique archaïque, souvent ambigu, encore inférieur à celui de Clavius. Rien ne laisse ici présager l'aisance et la modernité du texte de la *Géométrie*.

Dans les *Regulae*, la question des notations mathématiques est évoquée deux fois, toutes deux dans la Règle XVI. Sans en citer l'auteur, Descartes reprend d'abord la division de Viète, toute récente à l'époque, entre indéterminé et inconnu, tout en en modifiant la Clé. Ainsi différencie-t-il typographiquement le Donné indéterminé d'avec le Requis inconnu : les premières lettres de l'alphabet, minuscules pour l'indéterminé, les mêmes premières lettres, mais majuscules, pour les inconnues [3].

La Règle XVI contient surtout ce véritable bulletin de naissance de la notation moderne pour les puissances :

> "Comme si j'écris $2.a^3$, ce sera tout de même que si je disais le double de la grandeur notée par la lettre *a* qui contient trois relations" [4].

On notera d'abord ce louable souci, chez Descartes, d'une séparation entre le registre symbolique et celui des significations : ainsi *a* n'est pas une grandeur, mais bien le signe de celle-ci ("la grandeur *notée* par la lettre *a* "). Une exigence de distinction entre signifiant et signifié qui sera bien vite oubliée par ses successeurs. Quoiqu'il en soit, après des siècles de notations diophanto-cossiques, ce que Descartes mit ainsi en avant pour la première fois en mathématiques, aura été le Chiffre en position haute, une représentation symbolique neuve analysée au chapitre précédent.

---

1 A. T, X, 205-256.

2 Au sens cossique de grandeurs-carrées et grandeurs-cubes.

3 *Regulae* , op.cit, 455, 8-14. Pour une analyse générale des *Regulae*, tant de leur contenu mathématico-physique que de leur rapport à la *Géométrie,* on pourra consulter SERFATI M, *Regulae* et mathématiques, op.cit. Aussi ISRAEL G, Dalle *Regulae* alla *Geometrie* , in *il Metodo e i Saggi,* Actes du Colloque pour le 350[e] anniversaire du *Discours de la Méthode* et des *Essais* (G. Belgioisio, G. Cimino, P. Costabel, G. Papuli, eds) Acta Encyclopedica n. 18* e 18**, Istituto della Enciclopedia Italiana, Roma, 1990, vol 18**, 441-474.

4 *Idem,* 455, 15- 18.

Secondairement, la Règle XVI expose l'idée, également neuve pour l'époque, d'un supplément conceptuel de l'écriture symbolique littérale, par rapport à la numérique. A partir de l'exemple de $\sqrt{a^2 + b^2}$, comparé à $\sqrt{16 + 9}$, Descartes, en effet, dans une remarque très analytique, indique que là où celle-ci n'aurait laissé paraître que "la confusion dans le nombre", celle-là autorisera au contraire la distinction et la séparation entre les "causes" (ici les nombres de signes a et b) [5]. Le fond de la remarque n'est pas autre chose que la première affirmation des avantages des "canons" et "formules" sur les écritures numériques antérieures (Cf. 7.5.4). Ainsi se trouva explicitement formulé, pour la première fois en mathématiques, un des privilèges de la Lettre. Une dialectique qui sera très largement reprise par Leibniz [6], particulièrement dans les *Nouveaux Essais.*

A l'évidence, la symbolique cartésienne supposait connu le système de Viète pour le Donné indéterminé. Une remarque qui permet incidemment d'éclairer une question historique confuse : tout, dans les *Regulae,* démontre que Descartes avait eu connaissance des écrits de Viète. Descartes, cependant, a constamment affirmé n'avoir connu l'oeuvre de Viète qu'après son départ pour la Hollande, soit après 1628 [7]. Or, si la date de rédaction des *Regulae* suscite aujourd'hui encore des interrogations, tous les commentateurs s'accordent sur le fait qu'elle était certainement achevée autour de 1628. D'un autre côté, le système de Viète était si profondément novateur qu'il est tout à fait exclu que Descartes, par ailleurs peu préocuppé de questions de symbolique, l'ait complètement réinventé pour son compte [8]. Il nous paraît donc avéré que, quoiqu'il en dît, Descartes avait à tout le moins feuilleté un ouvrage de Viète avant 1628 et ainsi pris brièvement connaissance de son système

5 *Idem,* 457, 5-10.

6 Leibniz glorifie continûment les avantages des Canons et des Tables. Sur ce point, Couturat analyse les commentaires de Leibniz dans *La Logique de Leibniz,* op.cit, 478-481 (Appendice III,*Combinatoire et Charactéristique).* Dans les *Nouveaux Essais* par exemple (IV,VII, § 6 = P.S,390- 391), Théophile établira, avec une incontestable force de conviction, la supériorité des canons, universels, sur les résultats accidentels, purement numériques.

7 Cf. par exemple : A Mersenne, du 31 Mars 1638 (A.T, II, 82).

8 Notre interprétation semble cependant contredire les termes de la lettre de Descartes à Mersenne de la fin Décembre 1637 (A.T, I, 479). Ce ne sont, à notre sens, que des propos de circonstance, où Descartes veut seulement démontrer qu'il ne consentira jamais à publier que ce que ses prédécesseurs avaient ignoré : "Tant s'en faut que les choses que j'ai écrites puissent être aisément tirées de Viète, qu'au contraire, ce qui est cause que mon traité est difficile à entendre, c'est que j'ai tâché à n'y rien mettre que ce que j'ai cru n'avoir point été su ni par lui, ni par aucun autre... J'ai commencé là où il avait achevé."

symbolique, à défaut d'avoir lu complètement l'ouvrage [9]. D'un autre côté, la pauvreté symbolique déjà notée des *Cogitationes Privatae* de 1621 démontre aussi qu'au-delà de son initiation à La Flèche, l'éducation mathématique seconde de Descartes se fit entre 1621 et 1628 au plus tard, très probablement à Paris, au retour d'Italie.

10.2 La *Géométrie.*

Ce texte de 1637, majeur dans l'histoire des mathématiques, est tout aussi plein d'intérêt pour nous, sur le plan symbolique. C'est essentiellement par lui qu'en 1674, Leibniz [10] s'est initié au Calcul et à ce qui deviendra sa Charactéristique. Dans ses pages introductives [11], Descartes présente d'abord ses assembleurs sur des exemples littéraux, à propos de ce qu'il appelle les "quatre ou cinq" opérations usuelles, c'est-à-dire addition, soustraction, multiplication, division, et aussi extraction des racines, carrées ou cubiques [12]. Il termine en introduisant son exponentielle :

> pour adiouſter la ligne BD a GH, ie nomme l'vne a & l'autre b, & eſcris $a+b$; et $a-b$, pour ſouſtraire b d'a; et ab, pour les multiplier l'vne par l'autre; et $\frac{a}{b}$, pour diuiſer a par b; et aa ou a^2, pour multiplier a par ſoy meſme; et a^3, pour le multiplier encore vne fois par a, & ainſi a l'infini; et $\sqrt{a^2+b^2}$, pour tirer la racine quarrée d'a^2+b^2; et $\sqrt{C.\,a^3-b^3+abb}$, pour tirer la racine cubique d'a^3-b^3+abb, & ainſi des autres.

Descartes reprend ensuite la catégorisation de Viète pour l'Indéterminé et l'Inconnu, tout en en modifiant encore une fois la Clé, par rapport à Viète et aussi aux *Regulae*. Les premières lettres minuscules de l'alphabet (*a, b, c, d, e, f, g, h,* quelquefois *z)* valent ici pour la représentation du Donné indéterminé et les dernières lettres, toujours minuscules, (*x, y,*

---

9 Cette interprétation du "feuilletage" d'un traité s'accorderait ainsi, *stricto sensu,* avec les déclarations de Descartes, selon lesquelles il n'aurait pas "vu la couverture" d'un ouvrage de Viète. Cette interprétation nous a été suggérée par Mme G. Rodis-Lewis.

10 Que Leibniz ait connu la *Géométrie* dès 1674 est attesté par une correspondance avec Prestet, du mois de Septembre de cette même année. Cf. le commentaire de HOFMANN J, in *Leibniz in Paris...,* op.cit., 94, note 59.

11 A.T ,VI, 371.

12 La racine cubique est ainsi représentée par le C, qui suit le Vée.

quelquefois à nouveau *z)* pour celle du Requis inconnu [13]. La résolution du Problème de Pappus (sous sa forme initiale) [14], premier exemple historique d'une authentique mise en équation "indéterminée" d'un problème géométrique vraiment sérieux, en est certainement la meilleure illustration :

> " Que [15] le segment de la ligne AB, qui est entre les points A & B soit nommé *x* et que BC soit nommé *y* (...) Puis [16] à cause que tous les angles du triangle ARB sont donnés, la proportion qui est entre les côtés AB & BR est ausi donnée, & je la pose comme de *z* à *b* (...) Tout de même [17], les trois angles du triangle DRC sont donnés, & par conséquent aussi la proportion qui est entre les côtés CR et & CD, que je pose comme de *z* à *c* (...)."

L'usage d'un constitutif pour l'égalité est aussi un élément structurel important du texte. Si l'égalité avait été indiquée de façon rhétorique naturelle dans les *Cogitationes Privatae*, Descartes, qui jamais n'évoque Recorde, mais connaissait sans doute son signe par l'*Artis Analyticae Praxis*, de Thomas Harriot, introduisit en effet dans la *Géométrie* une autre Figure, surprenante, entièrement nouvelle, omniprésente $\propto$, et que nous appellerons la Boucle. Par exemple [18] :

> "Car si j'ai, par exemple :
> $$z^2 \propto a\,z + b\,b,$$
> je fais le triangle rectangle N L M..."

On se perd en conjectures sur l'origine de la Boucle, que Descartes, tout comme pour ses autres notations, n'explique nulle part. S'agit-il d'un *ae*, contraction d'un *aequari* latin, hypothèse soutenue par Leibniz [19] et Morris Cantor [20]? Dans ce cas, l'ouverture du signe devrait se faire à droite. Le signe cartésien évoque plutôt l'image, dans un miroir, d'un *ae* ainsi contracté. Wieleitner note, que dans certaines éditions, le symbole ressemble

---

13 A.T,VI, 375 et VI, 383-384. (mise en équation du problème initial de Pappus).

14 A.T,VI, 383

15 *idem*, lignes 3 à 5.

16 *ibidem*, lignes 11 à 14.

17 *ibidem* , lignes 18 à 21.

18 A.T ,VI, 374.

19 "Cartesius adhibet $\propto$, credo a litera initiali aequalitatis nempe æ".*Mathesis Universalis*, M.S, VII, 55.

20 CAJORI, I, 301.

plus à un *oe* renversé [21]. Cajori, pourtant bien peu fantaisiste, incline de son côté pour le signe astronomique persan du Taurus, de surcroît renversé, hypothèse que rien ne vient étayer dans les centres d'intérêt connus chez Descartes. Il est donc ici un mystère scientifique. Notons cependant que, dans le texte, le symbole vaut autant pour des égalités de définition (c'est-à-dire des affectations), que pour des égalités numériques. Par exemple [22]:

> tipliées par d'autres connuës. Ce que i'eſcris en cete ſorte :
>
> $$z \propto b,$$
> $$\text{ou } z^2 \propto -az+bb,$$
> $$\text{ou } z^3 \propto +az^2+bbz-c^3,$$
> $$\text{ou } z^4 \propto az^3-c^3z+d^4,$$
> &c.*
>
> C'eſt a dire : z, que ie prens pour la quantité inconnuë eſt eſgale a b ; ou le quarré de z eſt eſgal au quarré de b, moins a multiplié par z ; ou le cube de z eſt eſgal a a multiplié par le quarré de z, plus le quarré de b multiplié par z, moins le cube de c ; & ainſi des autres.

Comme on voit sur cet extrait, la représentation par Chiffre et exposant pour les puissances, introduite dans les *Regulae*, aura été érigée en procédé universel dans la *Géométrie*, où on la trouve à chaque page. On peut essayer d'en rechercher l'origine chez Descartes, étant bien entendu qu'on est ici réduit à des hypothèses. La conception que nous avons aujourd'hui de l'exponentielle, depuis Newton et Leibniz -un assembleur sans signe et deux places ouvertes- était tout à fait anachronique chez Descartes. Il nous faut ainsi revenir aux discours préliminaires des *Regulae*. Initialement, dans un assemblage comme

$$a^3,$$

Descartes ne chercha aucunement à représenter la loi d'organisation entre les interprétations de a et celle de 3, ce qui sera ultérieurement le point de vue mathématique de la *Géométrie*, mais seulement une représentation de la conjonction des deux prédicats, en dehors donc de toute symbolisation opératoire usuelle

---

21 *idem*.

22 A.T, VI, 373, lignes 16-27.

avec assembleur. L'idée la plus simple était de juxtaposer les deux signes sur la Ligne, selon

3 a ou a 3

par exemple. L'absence entre deux signes consécutifs dans la Ligne, comme dans 3 a, était cependant usuellement interprétée comme une multiplication. La Puissance ne pouvait donc plus user de cette faculté.

La seconde solution, du type a 3, fut adoptée par Pierre Hérigone dans son *Cursus Mathematicus* [23], qui n'introduisit pas davantage une position nouvelle, mais fit simplement suivre dans la Ligne, la Lettre par le Chiffre de la puissance, comme [24] :

a3 ou 2b4, ou encore 2ba2

Ce système, qui conservait au texte une seule Ligne, aurait donc pu sembler, de tous, le plus naturel. Il est cependant clair que son déchiffrement devient à son tour rapidement ambigu, et ce, d'autant plus inextricablement qu' Hérigone n'utilisa aucun Délimitant. Certes, le système de Hérigone aurait pu être décisivement amélioré ; il y aurait alors fallu des signes spécifiques de délimitation, adaptés à ses Puissances, et distincts de ceux jusqu'alors utilisés [25]. Or Descartes répugnait à l'emploi de Délimitants, qu'il évitera autant que possible, même dans la *Géométrie*. D'autre part, contrairement à Leibniz, il n'était

23 Paris. 1634.

24 Cf. CAJORI, I, 345.

25 En ce début du XVII^{e} siecle, fertile en innovations symboliques, on notera la publication d'autres systèmes. Le plus proche de celui de Descartes fut certainement celui de James Hume, que ce dernier rendit public à l'occasion d'une traduction française de Viète, *Le traité d'algèbre* (Paris, 1635). Hume utilisait également une notation par exposants en position haute, au moyen cependant de chiffres romains, par exemple (Cf. CAJORI, I, 204) :

A^{IV}, (pour le bicarré de A)

Dans tout l'ouvrage néanmoins, les chiffres romains ne se trouvent qu'à cette seule place exponentielle, le restant du texte utilisant les chiffres usuels. De plus, sur les chiffres romains ainsi "exposés", ne sera développé aucune espèce de calcul, si simple soit-il : ainsi ne se trouvera créée aucune nouvelle ligne de texte, susceptible d'être le support de Formes, comme dans le système cartésien. La notation de Hume n'est donc pas aussi voisine de celle de Descartes qu'elle peut le sembler. En dernière analyse, l'exposant apparaît ainsi rétrospectivement, chez Hume, à nouveau comme une marque (de Puissance) et non comme un signe mathématique inséré dans une syntaxe. Quoiqu'il en soit, le texte original de Viète a été profondément altéré par sa "traduction" par Hume.

aucunement soucieux de questions de symbolique, et moins encore d'innovations en ce domaine. Sa visée initiale était une représentation à la fois claire et économique. Descartes, dans les *Regulae*, fit donc choix de simplement créer en dehors de la Ligne, un lieu pour le Chiffre, s'autorisant ainsi, sans rencontrer d'ambiguïté, l'omission de tout Délimitant explicite. Il nous semble aussi, qu'ayant bien mesuré qu'il était deux prédicats à représenter, majeurs et distincts, Descartes ait simplement voulu les séparer fortement. Naturellement, dans la conception cartésienne, les représentations étaient déjà bien distinguées, l'une étant un Chiffre, et l'autre une Lettre. Il reste qu'en créant une position neuve, Descartes parachevait, en la surdéterminant, la distinction.

On notera enfin que si, dans la *Géométrie*, Descartes considéra la nouvelle notation comme désormais acquise pour un assemblage tel a^3 (et les puissances d'ordre supérieur), il maintint paradoxalement le *a a* contre le a^2 partout dans le texte. Incertitudes d'écriture sans doute héritées des hésitations conceptuelles des *Regulae*, et que nous avons ailleurs détaillées [26] : les "lignes" suffisaient-elles pour Descartes à tout "expliquer"? N'aurait-il pas fallu y ajouter les surfaces? Et sur ce point, il est bien possible que l'éditeur hollandais de Descartes, Van Schooten, fidèle au véritable fond de la pensée cartésienne, ait mieux entendu Descartes, que Descartes lui-même : dans certaines éditions latines de la *Géométrie* [27], il imprimera en effet a^2 non *a a*.

La conjonction, sous la plume de Descartes, de tous les éléments symboliques ici inventoriés, eut ceci pour conséquence : au-delà de la richesse de son contenu, la *Géométrie* est, historiquement, le premier des textes mathématiques qui soit, sur le plan de sa forme, aujourd'hui directement lisible. En sens inverse, le texte marqua, à l'époque de sa publication, une rupture définitive avec les écritures rhétoriques antérieures. On conçoit bien ainsi le "choc", évoqué par Costabel, que le texte n'a pas manqué de provoquer sur les lecteurs du temps [28]. Quoiqu'il en soit, la

---

26 Cf. SERFATI,*Regulae* et Mathématiques, op.cit.

27 "Van Schooten suivit en effet Descartes en 1646, en écrivant qq ou xx, plutôt que q^2 ou x^2,mais, dans l'édition latine de 1649 de la *Géométrie* de Descartes, il écrivit plutôt x^2 ". (extrait de CAJORI, I, 349).

28 Cf. *Les essais de la Méthode et la réforme mathématique*, op.cit., 220 : "que la mathématique soit la science d'un "chiffre", Descartes avait toutes les raisons d'en être persuadé, mais il aurait été imprudent de le proclamer trop bruyamment. Mieux valait montrer comment on peut se servir d'un tel moyen.

Ainsi, on peut mieux comprendre [...] pourquoi la *Géométrie* ne livre au lecteur la réforme considérable dont elle est le fruit que comme mode d'emploi."

Géométrie nous offre rétrospectivement aujourd'hui une texture symbolique souple, quasi-moderne, structurée en propositionnelles clairement distinguées, elles-mêmes analysées en Formes parfois complexes, et dont le commentaire rhétorique en termes de suite d'instructions opératoires est réduit ou inexistant. On notera que le texte est aussi quasiment dépourvu, selon nos critères contemporains, de Délimitants. Une absence qui fut en vérité pleine d'enseignements pour les contemporains, comme nous le détaillons *infra* dans nos conclusions (La *Géométrie*, ou la pierre de Rosette). On observe de même que la substituabilité complète (Cf. 11.6), si elle apparaît rétrospectivement permise par la combinatoire textuelle cartésienne, n'aura jamais été utilisée par son auteur. Deux aspects combinatoires qui constituèrent, dans les faits, une limitation aux progrès de la signification, c'est-à-dire des mathématiques.

10.3 Les conclusions de Leibniz sur la Spécieuse.

Ainsi, de Viète à Descartes, l'écriture symbolique mathématique s'est-elle définitivement constituée, revêtant les principaux aspects de sa structure actuelle. A la fin du XVII^e^ siècle, elle était devenue chose commune dans la communauté des géomètres. Dans le *De Ortu,* [29] de 1685-1686, Leibniz propose ainsi une analyse historique détaillée des travaux de ses prédecesseurs en Algèbre : de Platon à Wallis et Mersenne, en passant par Cardan et Viète. Sous la plume de Leibniz, l'analyse comparée des oeuvres de Viète et Descartes est bien instructive. C'est d'abord au seul Viète que Leibniz attribue la paternité de la Spécieuse :

> "Nihilominus Franciscus Vieta, Consiliarius et magister libellorum supplicum Regis christianissimi, Algebrae Speciosae quae nunc frequentatur, verus parens merito habetur ; is enim calculum a numeris tam cognitis quam incognitis sic adnotas sive species traduxit, ut jam certae semper formulae generales et quasi canones habeantur, et ita artis combinatoriae usus esse possit in Algebra, nam revera auxilio hujus artis (quae de formulis earumque similitudine et habitudinibus in universum agit) debetur

[29] La "Naissance" de l'Algèbre. *De Ortu, Progressu et Natura Algebrae, Nonullisque Aliorum et Propriis Circa Eam Inventis.* M.S, VII, 209-216, non daté, mais probablement de 1685 - 1686, selon HOFMANN,*Leibniz in Paris,* op. cit, 144.

Speciosa super communem Algebram praestitit, quanquam eadem per numeros suppositios instar literarum adhibitos multo adhuc majore fructu consequi liceat, ut alias ostendam. [30]

Viète est donc ici crédité de la découverte de l'Indéterminé (*a numeris tam cognitis quam incognitis*), de l'emploi des Lettres et des Chiffres, des "formules générales", enfin de ce que Leibniz appelle, en une très exacte formule, des "quasi-canons" [31]. L'algèbre Spécieuse de Viète, qui dépasse l'Algèbre ordinaire (*Speciosa super communem Algebram praestitit*) est ainsi élevée à la dignité, fort prisée sous la plume de Leibniz, d'Art Combinatoire (*ita artis combinatoriae usus esse possit in Algebra*), reconnaissant ainsi à Viète l'antériorité en la matière. Nos conclusions au chapitre 7(*Viète et l'Indéterminé*) sont ainsi en tout point conformes à celles de Leibniz. Si l'on excepte quelques manifestations de parti-pris à l'encontre de Descartes, les recensions et préalables historiques dont Leibniz usera si fréquemment dans des textes divers, comme ici le *De Ortu,* témoigneront -le cas n'est pas si fréquent chez les mathématiciens- de louables préoccupations historiques.

Après Viète, Leibniz en vient à Descartes [32], qui, selon lui, n'a rien ajouté, ni à la Spécieuse, ni à la science des équations, qu'il a seulement rendue plus commode et d'emploi plus usuel (*reddidit expeditiorem ac frequentius inculcavit*). Leibniz reconnaît néanmoins à Descartes l'invention -capitale- de l'application de l'Algèbre à la Géométrie (*Circa applicationem tamen Algebrae ad Geometriam id unice in Cartesio laudo)*:

"Is status erat Algebrae, quando in scenam prodiit vir utique insignis Renatus Cartesius, edita Geometria, quae licet sit egregia, tamen longe infra opinionem posita est, quam de ea vulgus concepit. Nam ipsi quidem Algebrae nihil plane quod sciam adjecit alicujus momenti ; nisi forte quod comparationem aequationum (Vietae et anterioribus non ignotam) reddidit expeditiorem ac frequentius inculcavit. Circa applicationem tamen Algebrae ad

30 *idem,* page 212.

31 Nous avons en effet observé l'absence chez Viète, de tout constitutif pour l'égalité, symbole pourtant indispensable à la constitution de tout canon véritable, et qu'on trouvera ensuite, pour la première fois, chez Descartes.

32 idem, page 213.

Geometriam id unice in Cartesio laudo, quod linearum curvarum etiam altiorum graduum naturas aequationibus expressit."

Sur le chapitre de Descartes, Leibniz aura ainsi réservé ses louanges, entre Algèbre et Géométrie, au seul registre des significations. Ainsi déniait-il toute avancée cartésienne dans le registre symbolique (la Spécieuse), ce qui nous paraît tout à fait injuste : l'assemblage exponentiel pour les puissances ne figurait évidemment pas chez Viète, non plus que l'emploi d'un constitutif pour l'égalité, ni qu'aucun signe de délimitation ; trois aspects que Leibniz avait par contre découverts à longueur de pages dans la *Géométrie*, avant de devenir des éléments structurants du système que lui-même utilisait quotidiennement.

Nous revenons en terminant à la nécessité que, dans notre introduction, nous avions dû concéder, au nom de l'effectivité, aux "traductions" cartésiennes anachroniques de textes mathématiques antérieurs à Descartes. Dans les dix chapitres qui précédent, nous avons pourtant détaillé l'ampleur des bouleversements structurels apportés aux mathématiques, en moins de quarante ans, par l'écriture symbolique. Dans ces conditions donc, il nous paraît que l'historien ou l'épistémologue ne devrait en aucun cas laisser croire que les "traductions" qu'il se trouve contraint d' utiliser ne sont que pures transcriptions d'un contenu mathématique sous-jacent inchangé qui serait demeuré, indépendemment de sa représentation, et qu'ainsi rien de profond ne se serait passé au XVII^e^ siècle. Du caractère intenable de cette position, la preuve la plus éclatante allait être administrée par les développements mathématiques inouïs que la symbolique nouvelle allait permettre après 1637, et qui auraient été inconcevables en fait et en droit avant son avènement. Le mérite premier en revint sans conteste à Leibniz et à la création qu'il élabora d'objets mathématiques nouveaux à partir de leur seule écriture symbolique, c'est-à-dire de leur Forme. Des questions qui font désormais l'objet de la seconde partie : *Symbolique et invention.*

Deuxième partie :
Symbolique et invention.

Chapitre 11

L'exponentielle après Descartes.

11. L'exponentielle après Descartes.

11.1.

La notation par exposants pour les puissances créée par Descartes prévaut de nos jours avec une si grande force d'évidence qu'on a quelque peine à imaginer qu'elle ait pu ne pas être, ni qu'il ait fallu si longtemps pour y parvenir. Ainsi constitue-t-elle aujourd'hui une figure transcendentale de la connaissance mathématique. Une importance pourtant sous-estimée par Descartes lui-même qui, ne l'ayant conçue que comme une simple commodité, n'en avait certes pas mesuré les développements mathématiques à venir. Pour un retour à l'histoire, rappelons cependant ces évidences : après Descartes, la classification des inconnues fut désormais gouvernée par l'ordre naturel de l'ensemble des entiers, d'où en germe, et ceci est bien connu, une classification d'équations et de courbes selon leur degré, -instaurant enfin, là où c'était magma, l'ordre dans la nature et la maison-, à terme aussi le *concept* de polynôme, en place d'un lot d'exemples spécifiés, concept qui se clivera à son tour, chez Euler et Riemann, par le jeu d'une nouvelle différenciation : la distinction entre polynôme et fonction quelconque, toutes choses qui avaient été tout simplement impossibles en fait, sinon en droit, avant l'exponentielle cartésienne.

Dès sa publication dans la *Géométrie* de 1637, l'exposant cartésien rencontra un large écho dans la communauté mathématique, et s'étendit à l'Europe savante. Le système de Viète pour les puissances n'y résista pas et fut rapidement abandonné. Wallis, l'un des derniers géomètres à le prendre en compte, publiera en 1657 [1] une table de conversion entre les symbolisations pour les puissances des divers systèmes antérieurs : cossique, celui de Viète, celui de Descartes.

D'un autre côté, comme on l'a souligné : la *Géométrie* ne porte aucun témoignage de substitution au lieu de la Lettre, donc aucun exemple comme :

$$(y - 3)^2$$

ou :

$$(3.x - 1)^2$$

et moins encore :

$$(4.a^2 + 3.a + 7)^2$$

1 *Operum mathematicorum. Pars prima,* 72. Oxford, 1657. Extrait de CAJORI, I, 215.

Des substitutions qui étaient cependant permises par la symbolique cartésienne. Et le seul fait de les écrire montrait que la Lettre pouvait n'être pas seulement venue occuper un lieu, c'est-à-dire un emplacement unique et déterminé, mais qu'elle avait en fait défini, tout comme un assembleur, un ensemble de positions consécutives virtuelles, autrement dit une *place*. Une conclusion qui se fit jour peu à peu, au XVII^e siècle, entraînant l'exponentielle cartésienne dans des transformations en profondeur, inouïes, analysées dans le détail épistémologique au chapitre 14 (*Formes sans significations*) et dont nous esquissons seulement ci-dessous les grand traits. Inconcevables pour Descartes, ces métamorphoses s'ancrèrent dans des procédures purement combinatoires typiques : d'une part l'emploi généralisé, par Newton et Leibniz, de littéralisations (Cf chapitre 13). D'autre part l'examen, lui aussi systématique, des deux dépendances de l'assemblage cartésien tant vis à vis de l'exponentié que de l'exposant. Ces transmutations combinatoires débouchèrent, quant au plan signifiant, sur des canons d'une importance mathématique considérable. Partant de la Forme cartésienne originelle a^3, nous examinerons successivement dans ce chapitre la substitution à la Lettre, au Chiffre, puis leurs combinaisons respectives, enfin des interprétations neuves, par extension de champs.

11.2 Substitution au lieu de la Lettre.

Sous la forme que lui avait donnée Descartes et sans altération de sa structure, l'exponentielle fut reprise presque aussitôt après sa création, dans une correspondance de 1648 entre Mersenne et Christian Huygens [2]. Après quoi, une note de 1658 sur la résolution des équations algébriques, le *De reductione aequationum*, rédigée par Jan Hudde et annexée à l'édition de la *Géométrie* de Van Schooten (dont Hudde était l'élève), vint pour la première fois opérer, au nom de la nécessité de symboliser des changements d'inconnues, des substitutions au lieu de la Lettre. Et ce furent encore une fois les équations cubiques, tout récemment réinterprétées à l'époque et symboliquement réécrites, qui servirent de moteur à l'innovation. D'une part en effet, toute équation cubique complète :

$$x^3 + a.x^2 + b.\,x + c = 0$$

pouvait être ramenée à la forme réduite :

$y^3 + p.\,y + q = 0$ par le changement :

2 Christian HUYGENS, Oeuvres (Vol 1). La Haye. 1888, 24 .

$$y = x + \frac{a}{3}$$

Ceci conduisait donc à substituer, et à écrire :

$$\left(x + \frac{a}{3} \right)^3 \quad \text{et} \quad \left(x + \frac{a}{3} \right)^2$$

D'un autre côté, pour résoudre l'équation réduite par la méthode de Cardan-Tartaglia, il fallait y poser : $y = u + v$, et, donc, écrire :

$$(u + v)^3.$$

Si, depuis plus d'un siècle, les deux procédés étaient bien connus en leur principe, c'est Hudde qui les représenta algébriquement le premier. Une technique qui, avec Tschirnaus et Leibniz, prit droit de cité symbolique vers les années 1675 [3]. Ainsi donc, le premier exemple historique de substitution à la Lettre consista en la substitution d'une Forme contenant la Croix, selon :

$$u \longrightarrow u + v,$$

pour obtenir $(u + v)^3$ ou $(u + v)^2$. Elle s'interprète en la puissance d'une somme de deux termes, c'est-à-dire d'un "binôme" [4]. Une Forme qui ne se trouve pas chez Descartes, comme nous l'avons noté, mais est par contre usuelle chez Newton et Leibniz, qui lui attribue, à juste titre, une source combinatoire, et non purement signifiante. A souligner cette origine, Leibniz, cependant, s'attire chaque fois l'incompréhension de Tschirnaus [5].

Sitôt répandue cette pratique de substitution à la Lettre chez les successeurs de Descartes, ils l'appliquèrent à des situations diverses, éloignées du motif originel. D'abord, à un trinôme, selon :

$$(u + v + w)^3 \quad \text{ou} \quad (u + v + w)^7.$$

Par une nouvelle extension, ils substituèrent ensuite, au lieu de la Lettre, des Formes complexes, construites avec les assembleurs préexistants, selon :

$$(3 \, . \, a + b - 2 \, . \, c - d)^3$$

ou encore

---

3 Cf. *The meeting with Tschirnaus*, in HOFMANN, *Leibniz in Paris*, op.cit, 164-186.

4 La Forme $(a + b)^3$ est ce que nous appellerons, en 13.1.2, la *transfigurée par substitution* de a^3

5 Cf. l'important échange avec Tschirnaus de Mai 1678 : M.S, IV, 459.

$$(a + \sqrt{a + b} + 2.b + \sqrt{2.b + 3.c})^3$$

Avec une Barre au lieu de la Lettre, ils purent aussi former :

$$\left(\frac{3}{2 . x + 5} \right)^3$$

Un exemple qui s'interprète comme un quotient dans l'exponentié. En sens inverse, avec une exponentielle dans un quotient, on obtenait $\frac{1}{x^4 - 1}$ comme chez Leibniz [6]. Les géomètres de la fin du XVIIe siècle envisagèrent ainsi la substitution, à la place de la Lettre cartésienne, de Formes arbitrairement composées avec le système symbolique dont ils disposaient. Tous les essais furent ici permis, avant même d'envisager les significations. Et Leibniz fut, après Newton, l'un des premiers à employer le procédé de façon, comme il dit, "combinatoire", c'est-à-dire systématique.

Sans que son auteur l'ait eu pour objectif, le système de Descartes aura ainsi permis la *substitution à la place de l'exponentié* [7]. Celle-ci s'analyse donc en cette opération purement combinatoire par quoi une Forme ou une Lettre, vient simplement se substituer à une Lettre, l'emploi d'un jeu complet de Délimitants étant à cet effet indispensable. L'interprétation de la substitution est alors le remplacement de la substance d'une indéterminée par celle du résultat d'une séquence ordonnée d'instructions (Cf. 5.3). Pour simple qu'elle apparaisse aujourd'hui cette substituabilité avait pourtant été impossible à concevoir dans le système diophanto-cossique qui avait, treize siècles durant, occupé seul le terrain des Puissances. En particulier, elle permit, sous des formes finies ou infinies, l'avènement d'une des "grandes formules" de la fin du XVIIe siècle, la "puissance d'un binôme", dont nous verrons ci-dessous comment Newton et Leibniz, chacun à sa façon, feront leur affaire [8].

6 M.S., V, 359. Extrait du *Specimen Noveum Analyseos pro Scienta Inifiniti circa Summas et Quadraturas,* paru en 1702 dans les *Acta Eruditorum.* Historiquement, c'est le premier texte mathématique traitant de ce qu'on appelle aujourd'hui les primitives de fractions rationnelles.

7 Tout comme celui de Viète.

8 Cf. PENSIVY,M : *Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme* . Thèse de troisième Cycle. Université de Nantes, in Sciences et techniques en perspectives. Université de Nantes, 14, 1987-1988. Cette thèse contient une très abondante bibliographie.

11.3. Substitution au lieu du Chiffre.

Le système cartésien permit aussi la substitution dans a^3, cette fois au lieu du Chiffre, d'une Forme comme (3 + 5) par exemple, et ainsi obtenir :

$$a^{(3+5)}$$

Les Délimitants étant usuellement omis, l'écriture devint :

$$a^{3+5}$$

le niveau de la Croix étant ainsi considéré comme plus faible, dans l'exposant, que celui de l'exponentielle. Du côté signifiant, on constatait par ailleurs l'égalité :

$$a^{3+5} = a^{3} . a^{5}$$

valable pour toute interprétation de a, c'est-à-dire précisément une des formules additives qui avaient dispensé le système cartésien des comptines; ceci renforçait donc l'intérêt de la substitution au lieu du Chiffre [9]. Par le même schéma , toujours au Chiffre 3, on pouvait faire venir la Forme (2. 5), pour obtenir :

$$a^{(2.5)}$$

que l'on écrivit pareillement $a^{2.5}$ sans Délimitants [10]. Sur le plan des significations, on constatait :

$$a^{2.5} = (a^{2})^{5}.$$

c'est-à-dire , cette fois, une règle "multiplicative". Répétons le : si aucune de ces deux substitutions ne peut être relevée

---

9 Bombelli, qui avait correctement apprécié le caractère numérique du prédicat relationnel, le représentait par un Chiffre pur, permettant ainsi en principe la substitution au lieu du Chiffre. Celle-ci se heurtait néanmoins à des difficultés pratiques. Si les substitutions

$$2 \curvearrowright 4 \qquad \text{et} \qquad 2 \curvearrowright (2+3)$$

étaient en effet possibles, au prix de quelques acrobaties graphiques, pour obtenir

$$4 \qquad \text{et} \qquad 2+3$$

respectivement, les choses étaient problématiques pour

$$2 \curvearrowright (2+3\,A+5\,B)$$

Ce ne sont cependant ici que des difficultés typographiques, d'une autre nature donc que l'impossibilité structurelle, observée au lieu du Creux. En fait, comme celui de Stevin, le système de Bombelli permettait bien en principe la substitution au lieu du Chiffre, mais la disposition graphique choisie la rendait, dans les faits, difficile.

10 Le niveau du Point est donc aussi plus faible, dans l'exposant, que celui de l'assemblage exponentiel.

chez Descartes, en dépit de l'intérêt évident des deux formules, elles furent largement employées par Leibniz et Newton. Combinant les deux substitutions, il fut donc à ce moment possible d'écrire :

$$a^{((2.4)+3)}$$

et donc de substituer, au Lieu du Chiffre, certaines Formes de niveau deux. L'*Epistola Prior* (1676)de Newton [11], qui sera analysée en détail en 14.1.1, allait permettre l'étape supplémentaire cruciale de la canonisation. Là où Descartes avait en effet écrit :

$$a^2 \text{ ou } a^3,$$

Newton substitua en premier lieu une Lettre au lieu du Chiffre, par exemple :

$$2 \longrightarrow p, \text{ pour obtenir :}$$

$$a^p,$$

Selon la Clé classique newtonienne, la Lettre p sera signe d'un donné indéterminé, avec pour champ l'ensemble des entiers naturels. Se retrouve ici ce concept de *champ* d'une Lettre pour désigner le territoire, ici l'espèce de nombres (entiers positifs, nombres fractionnaires, sourds, etc...) qu'est assujettie à décrire la grandeur qu'elle représente, qu'elle soit signe de Requis ou de Donné, un concept qui relève donc du seul registre des significations. Cette substitution newtoniennne d'une Lettre au lieu du Chiffre, qui conduit à passer de a^2 en a^p, sera appelée au chapitre 13 (*L'Art combinatoire. Substitutions et métamorphoses*) une littéralisation. Dès lors, la formule additive *supra* :

$$a^2.\, a^3 = a^{2+3}$$

deviendra :

$$a^p.\, a^3 = a^{p+3}$$

Puis, par une seconde littéralisation :

$$a^p.\, a^q = a^{p+q}$$

découvrant ainsi une égalité valable quelles que soient les interprétations des Lettres p et q dans le champ des

11 *Epistola Prior*, du 13 Juin 1676, in *Bw*, op.cit, 179.

nombres entiers, un *canon* donc, dit *exponentiel*, qu'on trouve en bonne place dans le *Conspectus Calculi* de Leibniz [12]:

On dira qu'on a procédé à la *mise sous forme canonique* (ou canonisation) de la formule additive. De son côté, la canonisation de la formule multiplicative conduit à :

$$(a^p)^q = a^{p \cdot q}$$

Dès lors, il fut possible d'envisager de substituer, au lieu du Chiffre, certaines Formes plus complexes encore, comme :

$$a^{((2.x)+y)} \text{ ou } a^{x+\frac{1}{x}}$$

Cette première littéralisation ouverte, du fait de Newton, loin d'être triviale, permit ainsi d'analyser la dépendance de:

$$a^p,$$

de façon symétrique, par rapport aux Lettres a et p. Dans le registre de la signification, les interprétations des deux Lettres seront au contraire dissymétriques. La distinction peut ici être bien illustrée en nous restreignant à la Croix. La dépendance de l'exponentielle par rapport à son exposant, s'incarne évidemment dans :

$$a^{p+q},$$

qui a produit le canon exponentiel déjà cité. Par contre, sa dépendance par rapport à l'exponentié, toujours relativement à la Croix, requiert la formation d'autres assemblages, tels :

$$(a+b+c)^p,$$

et conduit donc naturellement le géomètre à examiner cette fois le canon général du "multinôme" (ici : puissance d'un trinôme), en une formule remarquable qui sera établie par Leibniz [13], non sans quelques difficultés quant à l'écriture des coefficients. Deux regards qui auront ainsi été portés sur l'exponentielle, initialement de façon purement combinatoire; une opération évidemment impossible dans la symbolique cartésienne primitive, constituée d'une Lettre et d'un Chiffre strictement et délibérément différenciés. Cette symétrisation dans le regard, ici exposée sur un modeste exemple, est en vérité, lorsqu'elle est possible, un de ces (méta-) procédés d'invention en mathématiques,

12 MS, VII, 85. Cf *fac simile* en annexe.

13 in *Nova Algebrae Promotio*, M.S, VII 178-181.

inhérents à la pure structure des assemblages, sans référence -au moins initialement- aux interprétations : c'est en ce sens un de ces procédés "aveugles" à la signification, qu'emploiera et décrira Leibniz, dont on rappelle ici l'analyse bien connue, extraite des *Meditationes de Cognitione, Veritate et Ideis* (dans une traduction de L. Prenant)[14]:

> "Mais souvent, dans une analyse un peu longue, nous ne saisissons pas l'objet de la pensée d'un seul coup, dans toute sa nature, mais à la place nous utilisons des signes, et nous omettons d'habitude par abréviation de préciser dans notre connaissance présente leur conception explicite, sachant ou croyant que nous l'avons encore en notre pouvoir. Cette pensée, j'ai coutume de l'appeler aveugle ou encore symbolique; c'est celle dont nous usons en Algèbre et en Arithmétique et même en presque toutes choses [15]."

En dehors de l'écriture symbolique cependant, semblable symétrisation sur l'exponentielle, qui prend sa source dans la structure même de l'assemblage, aurait évidemment été impossible. Une question qui sera analysée au chapitre 13 (*L'Art combinatoire. Substitutions et métamorphoses*). De même donc que la *place de l'exponentié* avait succédé au *lieu de la Lettre*, se trouva constituée, cette fois dans la ligne haute, la *place de l'exposant* [16], qui vint remplacer le *lieu du Chiffre* [17]. A y voir se déployer les substitutions que nous venons de décrire, on comprend alors rétrospectivement mieux la supériorité intrinsèque du système de Descartes sur celui de Hume, avec ses chiffres romains. D'un autre côté, ce fut en vérité Newton l'auteur de la première littéralisation au lieu du Chiffre. Pas plus que Descartes cependant, Newton n'était intéressé par les questions symboliques. Ainsi se retrouva-t-il en accord avec lui, et presque dans les mêmes termes, dans un article

---

14 P.S, IV, 423.

15 Cf. l'analyse de G. GRANGER in Philosophie et Mathématique leibniziennes, op.cit., 6.

16 Le terme d'*exposant* apparut pour la première fois chez Stiefel dans le second chapitre de l'*Arithmetica Integra* de 1544 (fol. 235) avec le sens que nous avons donné au prédicat relationnel. Au-dessus de chacun des signes cossiques de Rudolff qu'il avait disposés sur une même ligne, et interprétés comme Nombre, Chose, *Census*, Cube, etc... Stiefel écrivait en effet une autre ligne de Chiffres purs, 0, 1, 2., 3..., etc, qui en étaient les rapports à l'unité respectifs, et qu'il appelle leurs *exposants* . Avec la même signification, le terme apparaît ensuite chez Clavius, *Algebra*, Ed. 1611, 25-26, où l'on trouve une typologie des équations. Curieusement, il est par contre absent chez Descartes.

17 La substitution à la place du Suffixe, chez Viète, telle :

$$qcq \longrightarrow cq$$

aurait été également possible, mais, pas plus que Descartes, Viète n'utilisa cette faculté, ni dans l'*Isagoge* proprement dit, ni dans les *Zététiques* . On en comprend aisément la raison : ajouter aux Suffixes des règles de substitution aurait demandé d'autres comptines encore, et d'autres tables.

des *Philosophical Transactions* [18], où se désignant à la troisième personne, il écrivait :

> " Mr Newton doth not place his Method in Forms of Symbols, nor confine himslf to any particular Sort of Symbols for Fluents and Fluxions."

11.4. L'assemblage cartésien.

Ainsi, conjuguant les substitutions, à la fois à la Lettre et au Chiffre, pouvait-on écrire :

$$(2.\,x + y)^{(2.\,n\,+\,3.p)}$$

ou bien

$$\left[\frac{4.\,x + y}{3\,.\,a + b}\right]^{(\,x\,+\,\frac{1}{x}\,)}$$

Dès lors, et du fait de cette création de deux places ouvertes, l'une dans la Ligne, l'autre sur la ligne haute, l'exponentielle cartésienne se comporta combinatoirement comme un assemblage élémentaire à deux places, amont et aval; l'absence de Délimitants était usuelle, que les règles hiérarchiques venaient pallier. S'il n'était pas d'assembleur apparent, tout se passait comme si le signe absent était indiqué au lecteur par la seule présence de la position haute. Dans l'assemblage ainsi authentiquement créé, désormais dit *exponentiel*, le lecteur devait considérer qu'il était dans le texte un *assembleur sans signe*, ainsi dénommé le "Blanc", qui symbolisait donc, entre les représentations des deux prédicats, ce que nous avons ci-dessus appelé la composition [19]. Du reste, les

---

18 *Philosophical Transactions*, XXIX, pour les années 1714-1716. Londres (1717), 204. Cf. Cajori, *Isis*, op.cit, 413.

19 Le terme d'*exposant*, toujours au sens relationnel, sera repris par Leibniz dans *Mathesis Universalis* (M.S, VII, 55). Dans son nouveau système qu'il compare à celui de Descartes, l'exposant est cette fois contenu dans un carré sur la Ligne. Cette disposition, qui ignore l'embranchement haut cartésien est dans le droit-fil de la position de Leibniz, qui, avec insistance, a toujours déclaré préférer un déploiement graphique sur la seule Ligne du texte :

(12) *Est et nota potentiae, seu ductus in se ipsum;* $\boxed{2}\,\overline{a+b}$ *significat quadratum ipsius* a + b, *et* $\boxed{3}\,\overline{a+b}$ ejus cubum, $\boxed{4}$ biquadratum, $\boxed{5}$ surdesolidum, $\boxed{6}$ quadratocubum et ita porro, ubi 2, 3,*etc. sunt exponentes. Quanquam et saepe sic solummodo scribo exponentem supra ponendo* $\overline{a+b}^{\,2}$ *vel* $\overline{a+b}^{\,3}$. *Quidam solent exponentem scribere non supra, se simpliciter post quantitatem per solentias*

logiciels modernes de calcul évolué, tel *Maple*, restituent un accent circonflexe comme signe assembleur, a $\wedge$ 3 pour la Forme cartésienne a^3 par exemple. En d'autres termes, la Puissance, c'est-à-dire la loi d'organisation entre les deux concepts primitifs, aura finalement trouvé une représentation mathématique dans le cadre symbolique usuel d'un assembleur [20]. Dès lors, la représentation cartésienne avait réintégré le modèle épistémologique préexistant. Cette conception ne fut nullement celle de Descartes qui, dans la *Géométrie*, n'effectua jamais aucune substitution, ni à la place de l'exponentié, ni à celle de l'exposant, et maintint une Lettre ou un Chiffre, signe unique dans chaque cas. Ainsi, au-delà de la double représentation des prédicats, l'autre innovation cartésienne considérable, apportée par le Blanc, demeura-t-elle inaperçue de son auteur.

11.5. Exposants et Délimitants.

Sitôt que l'exponentielle eut été insérée dans un calcul parmi d'autres Formes, se posa la question du déchiffrement. Nous avons vu en 1.5.2 que si, en principe, celui-ci requérait des Délimitants, le texte les omettait bien souvent. Sur ce plan du déchiffrement exponentiel, Descartes apporte quelques indications dans sa définition introductive des *Regulae* : ce sera, dit-il à propos de la Forme 2.a ^{3}, comme si je disais "deux fois la grandeur notée par la lettre a dans laquelle entrent trois relations." [21] Autrement dit, $2.a^3$ doit être déchiffré :

$$(2. (a^3))$$

et non $((2. a)^3)$.

Il n'y a dans la *Géométrie* aucune autre indication, seulement ce qu'on peut inductivement conclure de la pratique des calculs. Les exemples instructifs y sont d'autre part

---

exaltandam, ex. gr. a 2 *idem ipsis est quod* a a *vel quod* a^2 ; *sed cum saepe in calculo numeri ipsi pro literis adhibeantur, nascitur hinc aequivocatio, ut alia taceam incommoda.*

Comme on voit, tant chez Stiefel que Clavius ou Leibniz, le terme d'exposant est toujours réservé, dans le registre signifiant, à décrire le rapport à l'unité, indépendemment des modalités combinatoires effectives de la représentation ; il doit donc en son principe être distingué de la "position haute" cartésienne.

20 En sorte que le

$$a^3$$

des *Regulae* doit être finalement interprété comme : "Elevez la grandeur indéterminée de signe *a* à la puissance trois. "

21 *Regulae,* op.cit, 455, 16-18.

limités en genre, puisque Descartes n'effectue aucune substitution. On y observe néanmoins aussi que $2 + a^{3}$ doit être déchiffré $(2 + (a^{3}))$. En l'absence de Délimitants donc, la place amont du Blanc sera toujours considérée comme occupée par la seule Lettre-Chiffre qui précède. En d'autres termes, le niveau hiérarchique du Blanc est à l'amont plus faible que celui de tout autre assembleur. Divers exemples, chez Newton, puis Leibniz, permettront de compléter les règles hiérarchiques présentées en 5.5, avec cette autre conclusion impérative : dans tous les cas, la concaténation de signes sur la ligne haute sera regardée comme constituant en premier lieu une Forme unique, occupant la place aval, dont l'intérieur sera gouverné par les règles hiérarchiques usuelles. Ainsi, en l'absence de Délimitants, l'assemblage :

$$2.\,x + y^{2.\,n + 3.\,p}$$

doit être déchiffré en

$$((2.\,x) + (y^{((2.\,n)+ (3.\,p))}))$$

De la sorte, la position haute cartésienne fut réservée à la seule écriture de la Forme aval d'un assemblage exponentiel. Si elle permit bien de l'écriture sur une ligne neuve, elle ne constitua pas pour autant une nouvelle Ligne, au sens ici donné, c'est-à-dire sur laquelle un texte symbolique quelconque, comme une propositionnelle, ou un fragment de Forme, eût pu être inscrit. La ligne haute peut ainsi se décrire comme un embranchement par rapport à la Ligne, sans que jamais cette dérivation puisse la rejoindre.

11.6. Substituabilité restreinte ou complète.

Retournons à la substitution à la Lettre dans a^3 : on y remplacera donc le

$$a$$

par une autre Forme. Cette dernière, peut être construite, soit avec les seuls signes préexistants à la symbolique cartésienne, comme dans

$$(3 .\, x + 2 .\, y - 7)^{3}$$

et nous dirons qu'on a une substituabilité *restreinte* (quant à son champ), ou bien, au contraire, contenir à son tour des exponentielles, comme dans

$$(x^{2} + x + 2)^{3}$$

et nous reconnaîtrons alors une substituabilité *complète*. Le système cartésien autorise les deux modalités, et l'exemple de Stiefel a montré tout l'intérêt de la seconde. Les termes de restreint et de complet, réfèrent évidemment à la donnée d'un état du système symbolique, que nous dirons préexistant, ici celui de Viète à l'époque de Descartes. Vient alors s'ajouter une symbolique neuve, ici l'exponentielle. Dès lors, se trouve constitué, à un moment historique donné, un système symbolique (localement) achevé, dont nous avons vu à quel point il est souhaitable qu'il s'ouvre aux substitutions. Celles-ci pourront cependant s'entendre, soit relativement au seul système préexistant (substituabilité restreinte), soit au système achevé : c'est la complétude. Ces réflexions sont prolongées en 12.3 : *Extensions de systèmes préexistants.*

En recherchant la complétude des substitutions au Chiffre, on en vient alors à produire naturellement des exponentielles dans des exposants, c'est-à-dire des Formes comme :

$$(a+1)^{x^3-1}$$

ou encore

$$5^{3^2}$$

Si le premier exemple est justiciable des hiérarchies implicites habituelles, le second est ambigu et doit être impérativement complété, soit en $(5)^{3^2}$ soit en $\left(5^3\right)^2$.

C'est Jean Bernoulli (et non pas Leibniz) qui envisagea le premier en 1697 ces superpositions d'exposants [22], modestes en un premier temps, qui furent ensuite systématiquement reproduites au XVIII^e^ siècle par Goldbach, Euler [23] et surtout Waring [24], qui analysa les fluxions (dérivées) de fonctions composées ainsi produites. Ainsi, si x, y et v sont trois fonctions de t, Waring part-il de la dérivée de :

$$x^y . v$$

qu'il calcule en $x^y . v' + v . y . x^{y-1} . x' + v\, x^y . \ln x . y'$.

Il écrit ensuite sans Délimitants, la Forme :

244

22 *Acta Eruditorum* (1697), 125-133.

23 Dans l'*Introduction à l'Analyse Infinitésimale,* op.cit, 69, Euler donne ces exemples : a^{a^z}, a^{y^z}, y^{a^z}, x^{z^y}.

24 Cf. "Repeated exponents", in *Meditationes Analyticae* [1785], 8. Référence extraite de CAJORI, I, 358.

$$X^{y^{z^{v^{w^{\text{etc...}}}}}}$$

D'après le contexte, la Forme doit cependant être dûment complétée selon :

$$X^{\left[y^{\left[z^{\left[v^{\left[w^{[\text{etc...}]}\right]}\right]}\right]}\right]}$$

Et Waring de calculer alors la fluxion de la fonction qu'elle représente, suivant [25] :

3. Sit exponentialis quantitas $x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}}$, & ejus fluxio erit $y^{z^{v^{w^{\&c.}}}} \times x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}-1}$ $\dot{x} + x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}} \times z^{v^{w^{\&c.}}} \times y^{z^{v^{w^{\&c.}}}-1} \times \log. x \times \dot{y} + x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}} \times y^{z^{v^{w^{\&c.}}}} \times v^{w^{\&c.}} \times z^{v^{w^{\&c.}}-1} \times \log. x \times$ $\log. y \times \dot{z} + x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}} \times y^{z^{v^{w^{\&c.}}}} \times z^{v^{w^{\&c.}}} \times w^{\&c.} \times v^{w^{\&c.}-1} \times \log. x \times \log. y \times \log.$ $z \times \dot{v} + x^{y^{z^{v^{w^{\&c.}}}}} \times y^{z^{v^{w^{\&c.}}}} \times z^{v^{w^{\&c.}}} \times v^{w^{\&c.}} \times \&c.\ w^{\&c.-1} \times \log. x \times \log. y \times$ $\log. z \times \log. v \times \dot{w} + \&c.$ unde facile constabit lex, quam observat hæc series.

11.7 Exposants et extensions de champs.

Par le libre jeu des substitutions tant à la Lettre qu'au Chiffre, l'exponentielle connut ainsi, au cours du XVII^e siècle, des mutations profondes, très éloignées de son objet initial, et qui auraient été inconcevables pour Descartes. Des transformations qui ne s'arrêtèrent cependant pas là. Si complexe en effet que fussent à ce moment les métamorphoses, comme dans

$$\left[\frac{x^2 + x + 1}{x^2 - x + 1}\right]^{(3\,.\,n + 2\,.\,p)}$$

25 On peut ainsi décrire la question en termes modernes : posant $f(x, y) = x^y$, alors f est de classe C^{∞} de $\mathrm{IR} \times \mathrm{IR}^{+*}$ vers IR. Si x, y, z, v, w sont cinq fonctions de classe C^1 sur un intervalle I de IR, on pose :

$$F(t) = f(x, f(y, f(z, f(v, f(w))))).$$

Waring se propose de calculer $F'(t)$.

la Forme obtenue était toutefois directement interprétable : ainsi possédait-elle un objet, avec, pour substance, un certain nombre et, pour procédure, la Puissance [26]. D'une tout autre nature se révélèrent des substitutions ultérieures au lieu du Chiffre, organisant des extensions de champ de l'exposant, diverses, parfois extra-ordinaires. A la fin du XVII^e^ siècle commençèrent d'apparaître, chez Newton, puis chez Leibniz, des modifications en profondeur de l'exponentielle, produisant chaque fois des objets neufs, qui devaient donc cette fois être définis. Le premier exemple historique fut encore une fois du fait de Newton, qui substitua, au lieu du Chiffre, une Forme élémentaire interprétée comme fraction, selon

$$a^{\frac{m}{n}}$$

où m et n étaient des signes d'entiers, par exemple $a^{\frac{1}{2}}$. La substance de l'exposant n'étant plus celle d'un nombre entier, il fallait une définition *ad hoc,* que Newton fournit à Leibniz dans l'*Epistola Prior* de Juin 1676 [27], que nous étudions en détail en 14.1.1. Newton réalisait ainsi une authentique extension de champ de la Forme exponentielle: dans la Forme a^p en effet, p était antérieurement le signe d'un nombre entier; par le jeu de la nouvelle Clé newtonienne, il pouvait être désormais celui d'un rapport d'entiers. Ainsi se trouva élaboré, à propos de la Forme a^p, un nouvel objet, que nous dirons brièvement "exponentielle newtonienne." Trois mois après cette création, Newton réitéra, à la fin de l'*Epistola Posterior* d'Octobre 1676, [28] avec une autre extension, à exposant irrationnel cette fois, selon :

$$x^{\sqrt{2}}$$

comme ce qu'il appelle le "binôme":

$$x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$$

Après quoi, ce fut le tour de Leibniz, avec :

$$a^x,$$

où x est cette fois le signe d'un nombre quelconque (exposant "variable" : *gradus indefinitus* en termes leibniziens) produisant un objet encore nouveau, l'exponentielle "leibnizienne", qui apparut très tôt dans son oeuvre. C'est en effet

---

26 n et p sont signes d'entiers naturels.

27 *Bw,* op. cit, 179. *Fac simile* en annexe. Newton fournit en fait :

$$\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}}$$

28 idem, 225.

dans une vaste lettre à Tschirnaus, en forme de bilan, de Mai1678 [29], un an et demi après le départ de Paris, qu'on trouve pour la première fois, un *gradus indefinitus*, dans la Forme [30] :

$$x^{v} + \overline{ya}^{x} + \text{etc. aequ. } 0$$

Dès lors omniprésente dans la correspondance de Leibniz, cette exponentielle ne sera nullement anecdotique, mais au contraire le modèle de ce qu'il appellera la transcendance au sens mathématique [31], que nous analysons sur le plan épistémologique en 14.2.2 (*Gradus indefinitus* et transcendance mathématique). Succédant à celle de Descartes, on observe ainsi les constitutions successives d'une exponentielle chez Newton et d'une autre chez Leibniz. Les trois exponentielles, cartésienne, newtonienne, puis "leibnizienne" [32], se caractériseront par leurs *champs* respectifs pour l'exposant, c'est-à-dire les territoires qu'il est autorisé à parcourir : nombre entier naturel pour Descartes, fraction, puis nombre irrationnel chez Newton, "variable" enfin chez Leibniz, qui sera ainsi très fier d'avoir su dépasser (*transcendans)* à la fois Descartes et Newton. En dépit des apparences et d'un commentaire erroné et persistant, la signification leibnizienne du terme transcendant ne recouvre cependant nullement celle, toujours valide aujourd'hui, qui fut donnée au XVIII^{e} siècle, pour la première fois par Jean-Henri Lambert [33]: est transcendant tout nombre qui n'est racine d'aucune équation algébrique à coefficients entiers.

L'épopée exponentielle ne s'arrêta cependant pas là. Soixante ans après Leibniz, dans une lettre à Jean Bernoulli du 17 Octobre 1740 [34], Euler reprit la même Forme, pour y substituer cette fois un nombre imaginaire pur, selon :

$$2^{\sqrt{-1}} \quad \text{ou encore} \quad e^{x\sqrt{-1}}$$ [35]

Après avoir défini ses objets nouveaux, les "exponentielles imaginaires", Euler écrivait :

---

29 *Bw*, 372-382.

30 *Bw*, page 377. On a donné en annexe le *fac simile* d'un extrait de la lettre de Leibniz à Tschirnaus.

31 Cf. BREGER H, *Leibniz Einfürhung der Transzendenten*, in *3OO JAHRE "NOVA METHODUS " VON G.W. LEIBNIZ (1684- 1984)* in *Studia Leibnitiana*. Sonderheft 14. Stuttgart.1986.

32 Comme nous l'expliquons en 14.2, nous mettrons ici des guillemets à "leibnizienne".

33 in *Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques*. Mémoires de l'Académie des Sciences de Berlin, 17, (1761), 1768, 265-322 = Oeuvres, 2, 112-159. A.Speiser. Zurich. 1946. Nous avons analysé ce texte, ainsi que l'évolution de la signification du terme transcendant, de Leibniz jusqu'à Hilbert, in SERFATI, *Quadrature du Cercle,...* op.cit..

34 Cf. ENESTRÖM G., *Bibliotheca mathematica* (2nd ser.), XI, (1847), 49.

35 e est le signe de la base des logarithmes népériens, et x celui d'un nombre quelconque.

$$e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}} = 2\cos x$$

canon fondamental, aujourd'hui appelé formule d'Euler, qu'il reprit dans l'*Introductio in Analysin Infinitorum* de 1748 [36]:

183. Cependant, en ramenant, comme nous l'avons fait, les exponentielles imaginaires à des ſinus & à des coſinus d'arcs circulaires, nous pourrons encore aſſigner les ſommes de ces ſéries, lorſque a eſt un nombre négatif. En effet, puiſque $e^{x\sqrt{-1}} = cof.\ x + \sqrt{-1}.\ fin.\ x$; & $e^{-x\sqrt{-1}} = cof.\ x - \sqrt{-1}.\ fin.\ x$: réciproquement, en mettant $y\sqrt{-1}$ à la place de x, on aura $cof.\ y\sqrt{-1} = \frac{e^{-y}+e^{y}}{2}$ & $fin.\ y\sqrt{-1}$

Dans une lettre à Goldach du 9 Décembre 1741 [37], Euler observait aussi avec amusement que la valeur [38] de

$$\frac{2^{\sqrt{-1}} + 2^{-\sqrt{-1}}}{2}$$

était voisine de $\frac{10}{13}$. Cette exponentielle eulérienne, par nouvelle extension de champ "imaginaire", aura été essentielle dans le développement ultérieur des mathématiques. Nous examinons sa création en 14.5 (*Quelques exemples de prolongements*). De nos jours, on a davantage encore exploré cette voie des substitutions au Chiffre, en y faisant par exemple venir une matrice carrée [39], selon :

$$a^{\begin{bmatrix} 2 & 0 & -1 \\ -3 & -4 & 14 \\ 4 & 3 & 38 \end{bmatrix}}$$

Une exponentielle certes éloignée des intentions cartésiennes initiales ! La question, évidemment cruciale, de l'origine

---

36 Notre document est extrait de la traduction française de 1835, par Labbey. Bachelier. Paris, page 140. (§ 183, Chapitre X : *De l'usage des facteurs trouvés ci-dessus, pour la Sommation des Séries Infinies*).

37 FUSS P.H, *Correspondance mathématique et physique* (St. Petersbourg, 1843), Vol I, 111.

38 Avec $2^{i} = e^{i \ln 2}$, on trouve en effet cos (ln 2), dont une valeur approchée est 0,76923.

39 La définition de e^{Ω}, où a est le signe d'un nombre complexe, et Ω celui d'une matrice carrée complexe de taille p quelconque ($\Omega \in M_p(C)$) est ainsi : on montre que la série matricielle de terme général $\frac{\Omega^k}{k\,!}$ converge dans l'espace normé $M_p(C)$, quelle que soit la norme et quelle que soit Ω . On pose alors $e^{\Omega} = \sum_{k \in \mathbb{N}} \frac{\Omega^k}{k\,!}$ (exponentielle d'une matrice carrée).

et la pertinence des définitions de ces nouveaux objets, ainsi que d'autres semblables, obtenus par extension de champ, sera détaillée au chapitre 14 (*Formes sans significations*). Nous en indiquons brièvement par avance le schéma sur le cas de $a^{\frac{1}{2}}$. On *définira* l'interprétation de cette Forme neuve, de façon que le canon multiplicatif :

$$(a^n)^p = a^{n.p},$$

valable lorsque n et p sont signes d'entiers naturels, demeure encore valide, par extension de champ, lorsque n et p seront les signes respectifs du rompu 1/2 et de l'entier 2, c'est-à-dire :

$$\left[a^{\frac{1}{2}}\right]^2 = a^1 = a$$

Dans ces conditions éminemment contingentes, la substance (valeur) de $a^{\frac{1}{2}}$, sera par définition, celle de $\sqrt{a}$.

Terminant cette section, nous ferons ainsi nôtre la conclusion de Cajori : "Peut-être n'y a-t-il pas eu, dans l'algèbre ordinaire, de symbolisme qui ait été aussi bien choisi et aussi élastique que les exposants Cartésiens." [40]

Au XVII[e] siècle, ce fut en vérité un Leibniz enthousiaste qui se montrera le praticien le plus adroit de la substitution, un élément constitutif de sa Combinatoire. Appliquée ainsi à des places autres que celles de l'exposant et de l'exponentié, aussi à des Formes quelconques, la substitution devint alors, ce qu'elle est toujours aujourd'hui, une opération indispensable à la pratique quotidienne, en même temps qu'un concept-clé de la construction de l'écriture symbolique. (Cf. chapitre 13 : *L'Art combinatoire. Substitutions et métamorphoses*). Une évolution qui trouvera un certain achèvement au XVIII[e] siècle, dans la représentation d'une fonction par Euler, selon la Forme typique :

$$f(x),$$

qui institutionalisa, dans le symbolique, la faculté de substituer. A cet égard, le premier usage, des parenthèses rondes, essentiel dans cette perspective combinatoire, sera dû à Euler (1734), avec ce texte : "Si $f\left(\frac{x}{a} + c\right)$ denotet functionem quamcumque ipsius $\frac{x}{a}$." [41]

40 CAJORI, I, 360.

41 "EULER L, in *Comment. Petropol. ad annos* 1734-1755, Vol II (1840), 186-187. Référence extraite de CAJORI, II, 268. Ce fut aussi historiquement la première fois que la Lettre f fut le signe d'une fonction.

11.8 La Boucle cartésienne.

Placé sur le devant de la scène par l'autorité de son créateur, autant que l'accueil enthousiaste réservé à la *Géométrie*, le  , constitutif pour l'égalité, se répandit lui aussi en Europe. Les correspondants immédiats de Descartes, comme Florimond de Beaune, presque par mimétisme, l'employèrent aussitôt, même à l'adresse d'autres géomètres que Descartes lui-même [42]. Ainsi le trouve-t-on dans les *Miscellanies* de Samuel Foster [43].

Dans la lutte ouverte pour la suprématie avec le symbole de Recorde, deux arguments militèrent cependant contre Descartes, le premier étant inhérent à la matérialité du signe : la Boucle n'offrait pas en effet la double symétrie (par rapport à deux axes virtuels, parallèles aux bords de la feuille) que même les signes compliqués comme le Ruban de Digges

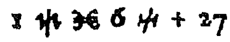
avaient spontanément présentée [44]. Et, sans doute, la double symétrie, incarnation supposée d'une interchangeabilité idéale entre les deux Formes, amont et aval, était-elle implicitement attendue des géomètres du temps [45]. De nature sociale, l'autre argument résulta des développements des mathématiques après Descartes. Dans leurs créations respectives des Calculs différentiel et infinitésimal, ni Leibniz, ni Newton, en effet, n'utilisèrent durablement la Boucle et se rallièrent au symbole de Recorde. Leibniz hésita quelque temps. Dans des textes de la fin de sa vie, où il rassemblait ses signes et ses définitions mathématiques, comme *Mathesis Universalis* [46] il opta finalement pour les Deux-traits, tout en signalant la Boucle cartésienne :

---

[42] Par exemple : De Beaune à Roberval, du 10 Octobre 1638. (A. T, III, 519- 523). Descartes utilisa la Boucle jusqu'à la fin de sa vie, comme en témoigne une lettre à Carcavi du 17 Août 1649 (A.T, V, 391-401) un an avant sa mort (pages 393 et 398). Dans sa réponse du 24 septembre 1649 (A.T, V, 412-422), Carcavi lui renvoie par contre son propre signe : deux traits parallèles, orthogonaux à la Ligne (*idem*, page 418).

[43] Londres, 1659.

[44] Comme dans l'équation :



250

$x^2 = 6.x + 27$ en termes post-cartésiens. On trouvera en annexe un *fac simile* d'une page du *Stratiotocos* (1579) de Digges.

[45] Cf. ANDRE, § 452, 180, op. cit, dans ses conseils de notation : "La symétrie ou dissymétrie qui existe, soit dans une relation, soit dans une opération, doit toujours être rappelée par le signe."

[46] M.S, VII, 55.

(14) Nota aequalitatis solet esse =, ut a = b. Cartesius adhibet $\propto$, credo a litera initiali aequalitatis nempe æ.

A la disparition de l'écriture rhétorique de l'égalité, fit donc rapidement suite un constitutif spécifique : les Deux-traits, qui, surclassant peu à peu la Boucle, devinrent ainsi universels. En regard des autres signes aujourd'hui usuels, la situation aura été un peu particulière. D'abord, l'introduction du premier signe spécifique se fit notablement tardive -1618 pour la version imprimée-, comme si, dans le cas de l'identité, la pérennisation d'une écriture purement rhétorique avait pu paraître plus légitime que pour d'autres concepts. Il y eut d'autre part seulement deux signes compétiteurs véritablement sérieux, ceux de Recorde et de Descartes, les Figures de Digges et Hérigone [47] ne pouvant faire illusion. Enfin, le combat trouva rapidement et définitivement une issue au début du XVIIIe siècle, au bénéfice de Recorde [48].

---

47 Au début du XVIIe siècle, en ces années symboliquement décisives, particulièrement pour la représentation de l'égalité, la palme de l'originalité pourrait bien revenir à P. Hérigone et à son :

2 I 2

un agrégat devant être interprété comme un bloc comme représentant l'égalité. De même, les agrégats 3 I 2 (resp. 2 I 3) devaient traduire la supériorité (resp. l'infériorité) numérique. Le système de Hérigone, déjà évoqué à un autre titre à la Section 10.2, était donc très spécifique. Ainsi

a3 + 5 ab 4 2 I 2 3b5

devait être interprété, en termes cartésiens, comme :

$a^3 + 5a.\ b^4 = 3b^5$. On donne en annexe un *fac simile* d'équations dans le *Cursus mathematicus* de 1634.

48 Le dernier des grands traités de mathématiques utilisant la Boucle fut l'*Ars Conjectandi* , ouvrage posthume de Jacques Bernoulli, publié en 1713.

ANNEXES AU CHAPITRE 11

Annexe 1. Equations chez Digges.

STRATIOTICOS. 51

Example of the third Rule.

1 ʒ ⚌ 6 ℛ + 27

Admitte this Æquation 1 ʒ ⚌ 6 ℛ + 27. The Moytie of 6 is 3, that Squared, is 9, which added to 27, maketh 36, the Roote Square of that is 6, whereto adioyning 3, the Moytie first used, I make 9, the Radix of that Æquation.

Example of the fourth Rule.

1 ʒ ⚌ 80 — 2 ℛ

Here you are to Extract the Square Roote of 80 lesse 2 Primes or Rootes. The moytie of 2 is 1, that Squared, maketh 1, this added to the abstract number, maketh 81, his Roote square is 9, from that I deducte my first moytie, so resteth 8, the Radix of that Equation.

Emploi du Ruban comme constitutif pour l'égalité, dans des équations du second degré du *Stratiocos*, de Digges (1579). Le signe présente la double symétrie. La première des équations se transcrit en $x^2 = 6.x + 27$, dont "la" solution, dit Digges, vaut 9.

Annexe 2. Equations chez Hérigone.

ab 2|2 bf,
bd 2|2 bc,
∠abd 2|2 ∠fbc,
▱bfmd 2|2 □ar.
△ace 2|2 △icb,
▱elme 2|2 □ch,
□bc 2|2 □af + □ai.

252

Equations dans le *Cursus mathematicus* de Pierre Herigone (1634), Volume VI, extraites d'une démonstration du théorème de

Pythagore, et exhibant le constitutif 2 I 2 pour l'égalité. La second ligne doit ainsi se lire bd = bc ; la troisième : les triangles abd et fbc sont congruents ; la derniere : le carré de bc est égal au carré de af plus le carré de ai.

Annexe 3. *Epistola Prior* de Newton.

$$\overline{P + PQ}|^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m-n}{2n} BQ + \frac{m-2n}{3n} CQ + \frac{m-3n}{4n} DQ = \text{etc.*)}$$

Epistola Prior de Newton de Juin 1676 (*Bw* , 180) adressé à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg. Combinatoirement, c'est la première littéralisation au lieu du Chiffre dans l'exponentielle cartésienne, avec les premiers exposants à la fois littéraux et fractionnaires. Sur le plan signifiant, on reconnaît la "formule infinie du binôme", qui occupa les géomètres de la fin du XVII[e] siècle. Longtemps considérée comme une formule d'Algèbre, prolongeant celle de Pascal, elle est aujourd'hui un développement en série entière particulier. Newton, qui n'évoque aucune question de convergence, fournit dans la suite de sa lettre un grand nombre de résultats d'application de sa formule, par exemple à ce qu'il appelle des "extractions de radicaux" , comme $\sqrt{1+x}$, obtenu comme somme d'un développement en série entière convergent.

Annexe 4. *Epistola Posterior* de Newton.

Communicatio Resolutionis Affectarum Aequationum per Methodum Leibnitii pergrata erit, juxta et Explicatio quomodo se gerat, ubi Indices potestatum sunt Fractiones, ut in hac Aequatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}}y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$, aut Surdae Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} - x^{\sqrt{7}}}|^{\sqrt{(3)}\frac{2}{3}} = y$ ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant Coefficientes ipsius x, sed indices Potestatum seu Dignitatum ejus, et $\sqrt{(3)}\frac{2}{3}$ indicem Dignitatis binomii $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. Res, credo, mea methodo patet; aliter descripsissem.

Epistola Posterior de Newton, d'Octobre 1676, *Bw* , 225. Combinatoirement, Newton substitue encore une Forme (avec préhenseur), au lieu du Chiffre cartésien. Ce sont ainsi les premiers exposants irrationnels, dont Newton ne donne aucune définition, ni même de méthode de calcul approché.

Annexe 5 . Le canon exponentiel dans le *Conspectus Calculi* de Leibniz.

(18) $1^b 1^c$ (seu 1^b in 1^c vel $1^{b}\frown 1^{c}$) aequ. $1^{\underline{b+c}}$ aequ. 1^e, seu $1^2 1^3$ aequ. 1^5, seu 100 in 1000 dat 100.000, et 4 in 8 dat 32. Nu-

MS, VII, 85. Si simple à concevoir aujourd'hui, ce canon, le produit d'une double littéralisation, n'apparut pas avant la fin du XVII^e siècle.

Annexe 6 . La création, par Leibniz, de la transcendance au sens mathématique.

Nam qui ejusmodi aequationem $x^v + \overline{ya}^x +$ etc. aequ. 0 solvere seu in aliam ordinariam mutare, seu impossibilitatem in ordinariam mutandi ostendere potest, is etiam perfecte omnes quadraturas invenire potest, aut demonstrare impossibilitatem, quia omnes quadraturae per hujusmodi aequationes transcendentes exprimi possunt

Lettre de Leibniz à Tschirnaus de Mai 1678. *Bw*, page 377. Elle contient la première occurrence historique de la Forme littéralisée x^y , avec exposant "variable" (*gradus indéfinitus* selon Leibniz), que nous avons aussi appelée "exponentielle leibnizienne". La littéralisation leibnizienne va en effet au-delà de la modification déjà apportée par Newton à l'exposant cartésien dans l'*Epistola Prior* . Et dans cette acception combinatoire, explicitement revendiquée par Leibniz, elle dépasse (*transcendans*) en effet les exponentielles cartésienne et newtonienne, ce dont Leibniz se montrera toujours très fier : ainsi la revendiquera-t-il
254 comme le paradigme de ce qu'il appellera la transcendance (au sens mathématique), et en particulier le Calcul des Transcendantes.

Sur le plan signifiant, Leibniz ne définira jamais ses exponentielles transcendantes, ni n'en donnera un mode de calcul approché, mais les insérera, comme ici dans la lettre à Tschirnaus, dans des exemples sans définition préalable : ainsi déclare-t-il dans ce texte que, pour une telle "équation transcendante", la seule question est en vérité de décider si elle peut être ramenée au calcul ordinaire, ou bien si l'on peut démontrer qu'elle ne peut l'être. Le calcul ordinaire est ici pour Leibniz, celui des "quadratures", c'est-à-dire en termes modernes, des primitives de fractions rationnelles.

XI. 26

256

Deuxième partie :
Symbolique et invention.

Chapitre 12

Charactéristique

et

Nouveau Calcul chez Leibniz.

12. Charactéristique et Nouveau Calcul chez Leibniz.

12.1. Quelques éléments d'une bonne Charactéristique .

Nous développons ici quelques remarques générales, propres aux systèmes symboliques mathématiques, qu'on peut aujourd'hui rétrospectivement apporter comme leçon de l'affaire des Puissances. L'écriture symbolique naissante, nous l'avions déjà observé, ne fut l'objet d'aucun relevé de conclusions avant Leibniz. Comme on l'a aussi noté, la constitution du système se fit sans décison concertée, au milieu de nombre de tentatives avortées, et sans la moindre analyse rétrospective sur celles qui avaient réussi. Avant Leibniz, même l'intérêt *per se* d'un sytème adéquat de notations ne fut, à notre connaissance, souligné par personne. Dans nombre de textes décisifs, tel la *Méthode de l'Universalité*, Leibniz au contraire mit longuement en avant, l'importance de ce qu'il appela une Charactéristique. Nous ferons choix, dans *Initia Rerum Mathematicarum Metaphysica* [1], d'un texte théorique qui établit le caractère organiquement supérieur, selon Leibniz, du concept de Charactéristique. Un méta-concept en effet, et qui s'applique universellement, en particulier à la métaphysique. (*Characteristica in universum et ad Metaphysicum pertinet*). Leibniz la dénomme aussi Art Combinatoire, ou Doctrine abstraite des Formes. (*Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae*). Et ce n'est que par une spécialisation que Leibniz parvient aux mathématiques : toute la doctrine de l'algèbre en effet ne serait, ultimement, que l'application aux quantités de l'Art Combinatoire et de la Doctrine des Formes (*totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae)* :

> Notandum est etiam, totam doctrinam Algebraicam esse applicationem ad quantitates Artis Combinatoriae, seu doctrinae de Formis abstractae animo, quae est Characteristica in universum et ad Metaphysicum pertinet.

La Charactéristique leibnizienne était en principe la science de la représentation symbolique générale. Nous la limiterons toutefois ici aux mathématiques, un modèle au demeurant pour Leibniz de toute Charactéristique [2]. Et, sur ce point, il ne manqua

1 M.S,VI, 24, non daté, mais postérieur à 1714.

2 Leibniz fut l'un des premiers à publier un système symbolique complet, ensemble de signes avec leur syntaxe, particulièrement celle des Délimitants. Ce fut une innovation considérable, les critiques de détail qu'on peut rétrospectivement lui apporter ayant ici un caractère secondaire. Parmi les textes leibniziens très nombreux en ce domaine, on en citera deux qui sont importants : le *Conspectus Calculi*, MS, VII, 85, et la *Mathesis Universalis* , M.S, VII, 55..

jamais de proclamer la supériorité de son système sur ceux de Viète et Descartes, comme en témoigne la correspondance célèbre du 28 Avril 1693 à l'adresse du marquis de L'Hôpital [3]. Leibniz traite de l'*élimination* de deux inconnues entre trois équations linéaires, une question aujourd'hui bien connue, mais dont l'idée directrice était neuve à l'époque : subsumer, sous ce qui est aujourd'hui appelé *résultant* de ces deux équations, ce qu'il en est de la disparition intégrale, dans l'écriture, de toutes les Lettres antérieurement interprétées comme Requis ; on trouve ainsi, en termes modernes, un déterminant d'ordre trois [4]. A l'époque de Leibniz, la question n'était pas tant la difficulté de trouver le résultant, que de le représenter d'une façon telle que tout lecteur puisse le déchiffrer et l'interpréter. Et Leibniz d'expliquer à l'Hôpital l'emploi de *ses nombres feints de deux caractères,* aujourd'hui appelés notation doublement indicielle [5]. Ainsi le Chiffre

$$21$$

doit être interprété, selon Leibniz, comme le coefficient de la première inconnue dans la deuxième équation : la *position* se trouve ainsi *numérisée.* Cet aspect du système symbolique était à cette époque neuf, inattendu et parfaitement opératoire. Et Leibniz, de conclure, magistralement, à l'adresse de l'Hôpital :

> Une partie du secret de l'analyse consiste dans la caractéristique, c'est-à-dire dans l'art de bien employer les notes dont on se sert, et vous voyez, Monsieur, par ce petit échantillon, que Viète et des Cartes n'en ont pas connu tous les mystères.

Nous examinerons ci-dessous la réception par Leibniz du système de ses prédécesseurs, en pratique ceux de Descartes et Newton, et aussi les développements et les modifications de structure qu'il y apporta. Nous reprendrons cependant dès maintenant, en hommage à son inventeur, le terme de *Charactéristique* pour désigner cette activité de représentation, dans l'écriture symbolique naissante, des concepts mathématiques.

---

3 M.S, I (2), 240

4 Avec cette signification, le terme "déterminant" ne se trouve pas chez Leibniz, qui l'utilise par contre dans des acceptions épistémologiques. Avec son acception actuelle, il apparaît pour la première fois dans les Recherches Arithmétiques de GAUSS (*Disquisitiones arithmetica* e, (1801), XV, 2).

5 Cf. l'analyse détaillée sur les indices doubles et multiples chez Leibniz de KNOBLOCH E, *Falsch datierte Handschriften mit Doppel-und Mehrfachindizies* in *Die unveröffentlicheten mathematischen Arbeiten von Leibniz.* Studia Leibnitiana Supplementa. Volume XVII. Leibniz à Paris (1672-1676), pages 34- 39. Cet excellent article inventorie et analyse les travaux non publiés de Leibniz durant son séjour à Paris.

Rappelons aussi que nous avons précédemment appelé *charactère* tout signe individué, codifiant l'un des prédicats dans la représentation globale d'un concept.

Retournons au cas des puissances pour observer que si Descartes considéra qu'il n'y avait pas un, mais deux prédicats à représenter, on aurait pu objecter que d'autres attributs pouvaient encore être ajoutés, de nature sensible par exemple, telle la couleur ou la densité de la chose. Si la remarque peut aujourd'hui faire sourire, ce sont cependant des aspects que Descartes et Leibniz examinèrent sérieusement avant de les écarter, à juste titre, comme non signifiants dans des questions de mathématiques proprement dites. Un questionnement qui continue cependant d'être pertinent aujourd'hui, dans la construction d'un système de notations mathématiques [6].

Que faut -il choisir en vérité comme prédicats à représenter dans un concept mathématique? Une réponse, sans doute la plus naturelle, serait de les prendre tous en compte, prétendant ainsi assurer l'exhaustion dans le signe de tous les attributs d'un concept. C'est sans conteste la position qui peut être continûment repérée chez Leibniz, avec une argumentation à double détente. D'abord, dit-il à Huygens, dans le très important texte de la *Characteristica Geometrica* de 1679, plus les charactères sont exacts, plus ils représentent de relations entre les choses, et plus grande est leur utilité. (*Quando autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem)*. D'un autre côté, pour Leibniz, le modèle achevé en est évidemment les charactères arithmétiques et surtout algébriques, qui représentent des nombres indéterminés. (*indefinitos*). Par eux donc, il n'y aura *rien* [7] dans la chose qui ne puisse être traduite par les charactères. (*nihil erit in re, quod non per characteres deprehendi possit*). Et comme d'autre part il n'y a rien en géométrie qui ne se puisse exprimer par des nombres... [8] Ainsi, écrit avec justesse Dietrich Mahnke [9] :

---

6 Les prédicats "candidats " étant, cette fois du registre mathématique.

7 Les italiques sont de nous.

8 *Characteristica Geometrica*, 10 Août 1679. A Huygens. M.S, V, 141 (2).

"Quando autem characteres sunt exactiores, id est quo plures rerum relationes exhibent, eo majorem praestant utilitatem, et si quando exhibeant omnes rerum relationes inter se, quemadmodum faciunt characteres Arithmetici a me adhibiti, nihil erit in re, quod non per characteres deprehendi possit : Characteres autem Algebraici tantum praestant quantum Arithmetici, quia significant numeros indefinitos. Et quia nihil est in Geometria, quod non possit exprimi numeris, cum scala quaedam partium aequalium exposita est, hinc fit ut quicquid Geometricae tractationis est, etiam calculo subjici possit." Sur la Caractéristique Géométrique , cf.ECHEVERRIA J ', *L'analyse géométrique de Grassmann et ses rapports avec la Caractérisque Géométrique de Leibniz*, in *Studia Leibnitiana*, XI/2, (1979), 223-275. Aussi sa thèse de doctorat (Université Paris I, 1980): *La Caractéristique Géométrique de Leibniz en 1679*.

9 MAHNKE D : *Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik*, in *ISIS*, 30, (Vol IX, 2), Août 1926, 279-293. Traduction de Colette Bloch.

" La représentation idéale serait atteinte [sq. pour Leibniz] si à chaque concept élémentaire correspondait une lettre donnée et si à tous les "enchaînements d'idées" correspondait aussi, de façon univoque, des relations bien définies entre les signes. Car alors il serait possible, grâce au parfait "consensus" entre les "propriétés internes des objets" et les caractères les représentant, de découvrir et de démontrer à l'aide de ces derniers toutes les vérités inhérentes aux premiers."

Leibniz accorde ainsi aux signes mathématiques ce privilège exorbitant de représenter la chose même, sans exception, ni réserve. Dans cette conception quelque peu totalisante, il n'y aurait donc plus de frontière véritable entre le signe et la chose, le référent et le signifiant. Une règle "suprême", qu'il développe dans un autre texte, contemporain de la Charactéristique Géométrique :

Artis ergo characteristicae haec summa regula est, ut characteres omnia exprimant quae in re designata latent, quod numeris ob eorum copiam et calculandi facilitatem optime fiet. [10]

Il nous paraît cependant clair, quoi qu'en dise Leibniz, qu'on ne peut tout représenter dans l'écriture symbolique. La prise en compte systématique de tous les attributs possibles conduit en effet à un alourdissement si considérable du système, que le représenté, foisonnant d'une myriade de signes explicatifs, s'il paraît alors sans doute plus conforme à la texture du concept, devient en vérité inexploitable et donc, à nouveau, inaccessible. En sens inverse cependant, le renoncement de fait à la représentation de certains prédicats peut compromettre l'efficacité du système symbolique, comme on a vu dans l'exemple cossique et ses apories. L'occultation dans la représentation d'un attribut essentiel, sa "mutification" donc, délibérée ou non, conduit à une représentation inorganisée de signes, sans rapport qui se puisse lire. A la limite, on obtient ici, en sens inverse du précédent, un pur et simple inventaire des objets, abrégés

10 Manuscrit de 1678, in M.S, VII, 8.

en signes distincts, comme dans le cossique. Occulter un prédicat d'autre part, en en mutifiant la représentation, organise à son endroit la perte de l'automatisme inhérent à tout calcul qui l'aurait impliqué. Dans la perspective d'une bonne gestion de l'avancement de la science, le choix des attributs à représenter dans les objets ou concepts mathématiques est donc, à la fois contingent et décisif ; en vérité, la question générale de la représentation se pose, en premier lieu, en termes économiques. Cette problématique fut cependant ignorée des premières versions de l'écriture symbolique, au nom du principe implicite : "un concept, un signe." Elle n'est historiquement apparue qu'au moment où, dans un objet essentiel pour les mathématiques (les puissances), deux prédicats devaient être impérativement représentés ; ceci vient après-coup expliquer l'importance considérable, tant dans l'histoire des mathématiques que celle de leur écriture symbolique, de la représentation des lignées et de son dénouement par l'exposant cartésien. Quoiqu'il en soit, l'élaboration, après Descartes, de toute bonne Charactéristique, aura donc dû commencer par un choix réfléchi et adapté des prédicats à représenter.

Ce choix fait, le principe d'univocité devra régir la construction de toute Charactéristique : un même attribut dans divers objets devra donc être représenté par un même signe, partout dans un même texte. Dans la phase de l'interprétation, cette répétition sera considérée comme la marque de la permanence de l'attribut. De même, deux attributs distincts, si l'on décide de les représenter, devront l'être par des signes distincts. Comme on voit, ces règles ne font pas véritablement obstacle à l'arbitraire du signe, qui demeure entier. Tous les mathématiciens d'aujourd'hui seront ainsi d'accord avec Leibniz pour sauvegarder, à la fois l'arbitraire dans le choix du signe et la faculté d'interpréter la "permanence du même".

Ces considérations générales d'univocité et de choix des prédicats doivent en vérité participer de toute entreprise cohérente de construction d'une représentation symbolique, qu'elle soit ou non mathématique. En un temps second cependant, les successeurs de Descartes, dont Wallis et Newton, observèrent que l'exponentielle offrait, quant à la Lettre et au Chiffre, la faculté combinatoire de substitution complète, dont les développements nouvellement apparus, formule du binôme et théorie des équations en particulier, démontrèrent le caractère véritablement essentiel. Sous la domination neuve de la substituabilité, la concaténation primitive changea alors de statut après Descartes, pour regagner le droit-fil institutionnel des constructions symboliques antérieures : assembleur et création de places ouvertes. La composition, initialement la position haute, disparut ainsi en tant que "nouveau" signe, subsumée par la création d'un nouvel assembleur de fait : le 263
Blanc ; de leur côté, les lieux ordinaires de la Lettre et du Chiffre

cartésiens, s'élargirent en deux places, de l'exposant et de l'exponentié. La situation était donc, en quelque sorte, rentrée dans le rang, avec tout simplement, dans le Calcul, un assembleur de plus, le Blanc symbolisant la Puissance. Tout cela fut après-coup réinterprété par Leibniz comme une extension des possibilités du Calcul, une extension au demeurant conforme à la syntaxe préexistante des assembleurs, avec places et Délimitants. Les relations combinatoires que le Blanc pouvait connaître avec d'autres assembleurs (et aussi avec lui-même) firent alors l'objet d'une investigation systématique, qui, dans le registre des significations, s'interpréta en un réexamen exhaustif des rapports de sens que la Puissance entretenait avec les autres opérations (puissance d'une somme, d'un quotient, quotient de puissances, etc...). C'est la situation que trouva Leibniz, lisant Descartes et Newton.

12.2. Le Nouveau Calcul de Leibniz.

C'est une situation qu'il contribua aussi à perpétuer dans sa théorie du Calcul des Sommes et Différences. Car une des leçons épistémologiques tirée par la postérité du dénouement, par Descartes, de la question des puissances, fut sans conteste la création analogique, par Leibniz, de son Nouveau Calcul, en une démarche que nous commenterons à partir des *Considérations sur la Différence qu'il y a entre l'Analyse Ordinaire et le Nouveau Calcul des Transcendantes.* [11] Un texte où Leibniz explique sa conception de son Calcul, en regard de celui de Viète et Descartes, réduits à leurs seules "cinq opérations" : dans ce Calcul ancien, les rapports mutuels de sens entre les cinq opérations avaient été depuis longtemps exhaustivement analysés (somme de produits, produits de sommes, racine de quotient, etc...).Avec l'avènement du système symbolique cependant, cet inventaire s'était traduit, dans le registre combinatoire, par l'examen, lui aussi exhaustif, des substitutions diverses dans des Formes organisées avec les assembleurs préexistants : Croix, Point, Trait, Barre, Vée. A cette liste, Leibniz considéra alors que lui-même ajoutait deux préhenseurs, de signes :

$$d \text{ et } \int$$

ci-dessous désignés comme Dée et Esse, et interprétés respectivement comme différentiation et sommation. Les

[11] Journal des Scavans. 1694 = M.S, V, 308.

signes étaient donc ceux d'assembleurs à une place (aval), initialement occupée par une Lettre comme :

$$d\,x \quad \text{ou} \quad \int z$$

Dès lors, dira Leibniz, il faudra, dans ce Calcul nouveau, réexaminer combinatoirement - c'est-à-dire sans aucune référence à la signification - les Formes obtenues en effectuant toutes les substitutions possibles, impliquant à la fois les anciens et les nouveaux signes opératoires, et examiner ensuite leurs possibles interprétations. Relativement au Dée, c'est précisément ce à quoi il se livra exhaustivement, dans la première partie de la *Nova Methodus* de 1684 [12], qui signa, comme on sait, la création officielle du Calcul. Sur le plan combinatoire en effet, Leibniz examina *toutes* les formes possibles obtenues en substituant, au lieu du x, dans :

$$d\,x$$

cinq des Formes anciennement constituées dans les Calculs de Viète et Descartes, pour obtenir donc :

$$d(x+y) \quad d(x-y) \quad d(x.y) \quad d\left(\frac{v}{y}\right) \quad d(x^a)$$

et qu'il interpréta ensuite, comme autant de questions ouvertes, s'interrogeant ainsi sur ce que valait la différentielle d'une somme, d'une différence [13], d'un produit, d'un quotient [14] ou d'une puissance [15]. Pour la différentielle d'un produit par exemple, on a, constate- t-il :

$$d\,(x.\,y) = x.d\,y + y.d\,x$$

---

12 *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* In *Acta Eruditorum*. Leipzig. 1684 = M.S, V, 220.

13 Leibniz dit *Addition* et *Soustraction*, Idem, 220.

14 Idem, 222. Leibniz dit : *Division* : Nous omettons ici à dessein les ambiguïtés délibérées de signe que propose Leibniz :

$$d\left(\frac{v}{y}\right) = \frac{v\,dy - y\,dv}{y\,y}$$

15 Idem, 222. *Puissances* : $d\,(x^a) = a.\,x^{a-1}\,dx$. Il s'agit donc d'un canon, complètement littéralisé. Cettte question est étudiée en détail en 13.2.3.c (*Littéralisation des propositionnelles*). Il est clair d'après le contexte, que a est le signe d'un entier indéterminé, positif ou négatif. L'exponentielle considérée ici est donc "newtonienne", dans un cas particulier. Leibniz prend ensuite deux instantiations numériques a = 3, d'où : $d\,(x^3) = 3.\,x^2\,dx$ et un autre où a= - 3.

une formule qui ne lui était nullement spontanément apparue, et qu'il avait en fait eu quelque mal à démontrer [16]. C'est aussi un résultat qui devint -et est aujourd'hui resté- tout à fait important, sous le nom d'intégration par parties [17]. Le système de règles opératoires ainsi complété par l'adjonction des cinq propriétés fut d'abord appelé l'*Algorithme différentiel* par son créateur [18]. Il enveloppait donc le concept nouveau de différentielle sur le plan signifiant, et le Dée, sur le plan combinatoire. L'Algorithme englobait aussi l'ancien Calcul. On comprend bien ici comment la génération combinatoire de tous les assemblages de signes aura contribué à l'invention. Car l'idée même de rechercher la formule de la différentielle d'un produit, par exemple, n'avait que peu de chance d'être initialement retenue : elle n'avait pas en effet de sens géométrique immédiat (on ne peut représenter comme ordonnée sur une figure le produit de deux ordonnées). L'Art Combinatoire avait donc ici contribué, non pas à trouver des démonstrations, mais des idées de propriétés à démontrer, explorant ainsi un territoire neuf de l'*Ars Inveniendi*. Dès lors, Leibniz ne cessa de proclamer les privilèges de son Art Combinatoire. Il touchait ainsi à ce chapitre crucial de la pure invention en mathématiques, pour lequel, même aujourd'hui, il n'est pas de traité des méthodes. Au-delà de ces déclarations d'intention, pourtant fort claires, Leibniz ne s'expliqua malheureusement pas sur le détail de sa propre pratique, ni sur ce que seraient les modalités effectives de l'application de son Art Combinatoire à son Algorithme, à la manière de ce que nous avons ici

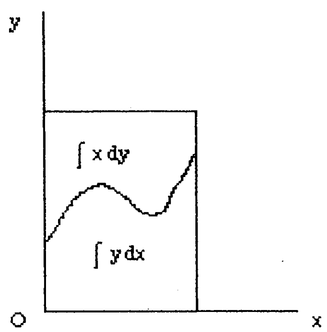
16 De cette propriété fondamentale, Leibniz avait d'abord trouvé une sorte de justification empirique entre 1675 et 1677, en une genèse laborieuse, longuement analysée par CHILD, *The Early...*, op.cit, 83, 91, 97, 124, 130. Il l'avait aussi éprouvée comme vraie, en prenant pour x et y des expressions monômiales simples. Elle était ainsi justiciable d'une induction. Il en avait aussi fourni, dans une lettre à Oldenbourg du 21 Juin 1677 (*Bw*, 241), une prétendue démonstration générale, utilisant des "infiniment voisins ", mais qu'il n'ose pas reproduire dans un texte imprimé. En fin de compte, Leibniz ne donnera aucune démonstration.

17 Notre remarque correspond à l'idée originelle de Leibniz : démontrer le résultat sous sa version "sommatoire " :

$$x.y = \int y\,dx + \int x\,dy$$

au moyen de la bi- partition d'un rectangle, conformément à la figure ci-dessous (Cf CHILD, *The early mathematical manuscripts of Leibniz*, op.cit.)

266



18 Idem, 222.

proposé [19]. Aussi, en dépit des proclamations enflammées de son auteur, cette démarche systématique demeura longtemps incomprise de ses collègues, Jean Bernoulli en particulier, qui commença par considérer la *Nova Methodus* comme "une énigme plutôt qu'une explication [20]." C'était pourtant elle qui avait constitué chez Leibniz le principe actif de sa recherche.

Dès lors que l'Ancien Calcul était tout entier contenu dans le Nouveau, la substitution de Formes plus complexes se trouva naturellement permise, comme dans :

$$d\,(\,6x^2 - 3x\,y + 5\,)$$

ou encore [21]

$$d\,\left(\,\frac{x}{1} + \frac{x\,.\,x}{1.2} + \frac{x^3}{1.\,2\,.\,3} + \frac{x^4}{1.\,2\,.\,3.4} + \text{etc.}\,\right)$$

Plus tard, Leibniz s'avisa que le Dée étant un assembleur à une place seulement, des Formes comme :

$$d\,(d\,x) \text{ et } d\,(d\,(d\,x))$$

étaient, elles aussi, combinatoirement légitimes [22]. Leibniz les interpréta naturellement comme la répétition de la différentielle, les dénomma différentielle seconde et troisième, et les représenta symboliquement [23] par :

$$d^2\,x \text{ ou } d^3\,x$$

---

19 L'Algorithme est abruptement présenté, sans aucune explication ni démonstration, seulement ironiquement précédé d'un : "Cela dit, telles sont les règles du Calcul."

20 C'est pourtant ce même Jean Bernoulli qui, une fois qu'il en aura compris tout l'intérêt, tirera un extraordinaire profit de la découverte leibnizienne. On peut à juste titre considérer Jean Bernoulli comme un des inventeurs à part entière de la *pratique* du calcul Différentiel et Intégral.

21 Jean Bernoulli à Leibniz, du 1er décembre 1696. M.S, II, 340. En termes modernes, il s'agit de trouver une équation différentielle satisfaite par la somme d'une série entière.

22 Cette propriété des préhenseurs n'est pas partagée par les assembleurs à deux places, qui, eux, ne peuvent être directement consécutifs.

23 Dans l'*Historia et Origo Calculi Differentialis* (M. S., V, 392), Leibniz explique comment l'idée des différentielles et des sommes, puis des différentielles successives, lui était initialement venue en 1674-1675 par l'étude des suites (*series*) de nombres entiers. Reprenant un schéma épistémologique, que nous dirons du Triangle Harmonique, Leibniz déclare en effet (M.S, V 397), qu'en appelant y "le terme d'une *series* initiale", il est "possible " (*licebit*) d'appeler dy celui de la ligne différence ou différence première, ddy la différence seconde, d^3y la différence troisième, d^4 y.

Ainsi l'exposant cartésien se trouva-t-il recevoir chez Leibniz une interprétation nouvelle, pour laquelle il n'avait jusque-là nullement eu vocation : celle d'indiquer la répétition. Cette faculté, inaugurée par Leibniz, est aujourd'hui usuelle dans la représentation d'une itérée par composition [24]. Naturellement aussi, dans les Formes ainsi constituées, Leibniz opéra les mêmes substitutions que précédemment, pour obtenir par exemple :

$$d^3\,(2x^2 - 4x + 5)$$

Ultérieurement, il introduisit la sommation, une autre opération qu'il représenta symboliquement par le Esse, un second préhenseur. La répétition de la sommation se trouva dès lors à son tour permise [25], pour obtenir par exemple [26] :

$$\int\int x \quad \text{ou} \quad \int\int\int x$$

que Leibniz représenta, toujours à l'aide d'exposants cartésiens, suivant [27] :

$$\int^{(2)} x \quad \text{ou} \quad \int^{(3)} x$$

et qu'il dénomma sommes seconde ou troisième. La substitution ultérieure, au lieu du x, dans ces Formes, le conduisit alors à des exemples plus complexes, comme :

$$\int^{(3)} (5x^4 - 6x + 7)$$

Dans de nombreux textes, dont les *Considérations* sont un exemple, Leibniz fit part de sa profonde satisfaction d'avoir

---

24 Si E est un ensemble quelconque, et f une application de E dans E, on note ainsi aujourd'hui $f^{(2)} = f \circ f$, et, par récurrence, $f^{(n)} = f^{(n-1)} \circ f$. Cette symbolique est donc due à Leibniz.

25 Leibniz en rapporte pareillement l'origine aux suites de nombres : "appelant x le terme d'une autre *series*, il est possible d'appeler $\int x$ la somme de celle -ci et $\int\int x$ la somme des sommes ou somme seconde, $\int^3 x$ la somme troisième et la somme quatrième $\int^4 x$." (M.S, V, 397).

26 Cf. par exemple Leibniz à Jean Bernoulli du 28 décembre 1696, M.S, II, 352, où l'on trouve :

2,68 $$y = \frac{1}{2}xx + \frac{1}{6}x^3 + \int\int y\,dx\,dx$$

27 Cf. Jean Bernoulli à Leibniz du 20 Avril 1695. M. S, II, 171.

ainsi mis à jour ce schéma double et répétitif, que nous appellerons simplement dans la suite le *Schéma* leibnizien [28]. Dès lors cependant que le Dée et le Esse étaient tous deux des préhenseurs, des Formes comme

$$\int d\,x \qquad \text{ou} \qquad d\int x$$

étaient légitimes, et interprétables par exécution successive de la différentiation et de la sommation, dans les deux sens d'effectuation possibles. C'est alors que Leibniz établit les deux canons :

$$\int d\,x = x \qquad \text{et} \qquad d\int x = x$$

valables quelle que soit l' "ordonnée", de signe x. Comme l'écrit Leibniz à Jean Bernoulli [29] : *Ita* $\int$ *et* d *conjuncta se mutuo tollunt.* Ce fut là une double formule d'importance considérable, que Leibniz prouva, ou crut prouver, par des voies géométriques inspirées d'analogies avec certaines propriétés de suites d'entiers étudiées à Paris. De façon quelque peu artificielle, il reconstruira la genèse de sa démonstration en 1713, dans l'Histoire et Origine du Calcul Différentiel, [30] texte de circonstance dans le cadre de sa querelle avec Newton. Quoiqu'il en soit, et de la même façon que l'élévation à la puissance et l'extraction de radicaux, la différentiation et la sommation purent ainsi être considérées par leur inventeur comme deux opérations antagonistes, dans la mesure où leur exécution successive conduisait à l'identité, quel que fût le sens de l'effectuation. Un second schéma épistémologique donc, d'une autre nature, que nous appellerons *Dualité*, et auquel Leibniz attacha également une grande importance, comme en témoigne l'extrait suivant :

> Car cette méthode ou ce *calculus differentialis* sert non seulement aux différences, mais aux sommes, qui sont le réciproque des différences, à peu près comme le calcul ordinaire ne sert pas seulement aux puissances, mais encore aux sommes qui sont le réciproque des puissances [31].

Leibniz, ébloui par sa propre découverte, montra même que l'analogie entre les deux couples, puissance-racine d'une part, et différentiation-sommation d'autre part, se prolongeait encore

---

[28] Cf. ci-dessous *Considérations* ... op.cit.
[29] 3 Octobre 1796. M.S, III, 802.
[30] Cf. *Historia et Origo*, op.cit.
[31] Idem.

dans le registre de l'effectivité. Dans chaque couple en effet, il est un des deux termes qui est toujours explicitement effectuable (puissance et différentiation), cependant que l'autre (racine et sommation), en règle générale, ne l'est pas. Dire que la sommation représentée par une certaine Forme n'était pas effectuable, c'était dire qu'on ne pouvait donner de celle-ci une représentation symbolique autre qu'elle-même, ou encore qu'il n'en était pas d'interprétation autre que la constatation qu'il s'agissait d'une certaine sommation [32]. Dès lors, des Formes initialement dépourvues de toute signification géométrique, seulement obtenues par le pur jeu combinatoire d'une succession de substitutions, comme dans :

$$\int 6\,\frac{x^3+2\,x^2-1}{4\,x+1}$$

ou : [33]

$$\int \overline{\overline{m\,x+n}\,,\,dx\,\sqrt[3]{h\,x^3+i\,x\,x+k\,x+l}}$$

ou encore, dans une lettre d'Avril 1695 : [34]

$$\int \overline{z^e d^m n} + e \int \overline{z^{e-1}\, d^{m-1}\, n \quad dz}$$

apparurent-elles aussi comme combinatoirement légitimes, et furent-elles effectivement envisagées par Jean Bernoulli et Leibniz, mettant alors au jour une cascade d'objets et de problèmes nouveaux. Avec cette fois la différentiation et la sommation pour supports, on reconnait ici les mêmes mécanismes structurels et les mêmes conclusions que tout à l'heure pour l'exponentielle. Que toute structure symbolique nouvelle dût être ainsi ouverte aux substitutions devint dès lors une exigence primordiale, présente dans la pratique de Leibniz à chaque page, mais jamais cependant explicitement revendiquée comme telle. De son Nouveau Calcul -qu'à partir des années 1690, il appellera aussi Analyse des Transcendantes-, Leibniz acquit alors une légitime fierté :

32 Cf. notre analyse dans SERFATI, *Naissance...*, op. cit. Cette question est aussi developpée plus loin au chapitre 14.

33 Jacques Bernoulli à Leibniz. 28 févier 1705. M.S, II, 97.

34 Jean Bernoulli à Leibniz. 20 Avril 1695. M.S, II, 171. Un *fac simile* d'une partie étendue du texte est donné en annexe.

> Et j'ai donné par là une voie générale [sq. l'Analyse Transcendante], selon laquelle tous les problèmes, non seulement des différences ou sommes, mais encore des différentio-différentielles ou sommes de sommes et au-delà, se peuvent construire suffisamment pour la pratique. (...)
> Enfin, notre méthode étant proprement cette partie de la Mathématique générale, qui traite de l'infini, c'est ce qui fait qu'on en a fort besoin, en appliquant les Mathématiques à la Physique, parce que le caractère de l'Auteur infini entre ordinairement dans les opérations de la nature [35].

Ainsi, cette classe de problèmes nouveaux, imaginés à la fin du XVII^e siècle, aura-t-elle été ancrée dans la pratique des substitutions, une origine combinatoire donc, et non signifiante. Dans une Forme comme celle d'Avril 1695 *supra*, il n'y a en vérité plus aucun référent effectivement représentable sur une figure, seulement la faculté lointaine et implicite d'un possible rattachement à la géométrie, fonctionnant comme une sorte de garant. De la sorte, Leibniz et Bernoulli contribuaient mécaniquement à l'affaiblissement du registre des significations. C'est le texte symbolique qui se trouva ainsi à nouveau occuper, chez Leibniz, la position première, chronologiquement et conceptuellement. A la fin du XVII^e siècle, l'antique référence géométrique, ainsi amenuisée, disparut parfois complètement, ouvrant alors à la mathématique des voies algébriques plus modernes, conceptuellement distinctes en tous cas, de toutes celles qui précédaient.

Il nous faut ici redresser quelque peu en terminant l'idée d'un Leibniz "maître d'oeuvre(*master-building*) des notations mathématiques", selon l'expression de Florian Cajori [36], ou encore "fondateur du système symbolique", selon celle de Mahnke [37]. En vérité, Leibniz n'avait rien inventé du système définitivement constitué avant lui par Viète, Descartes, puis Newton (assembleurs avec places, Délimitants et constitutifs, substitution au Chiffre), mais, doté d'une imagination symbolique véritablement prodigieuse et d'un optimisme impénitent, il le développa avec tant d'allégresse et dans des situations si variées, qu'il le féconda en le faisant fonctionner, particulièrement par le jeu des métamorphoses. Dans l'incompréhension générale [38], il mit ainsi en circulation, des années

---

35 Idem.

36 CAJORI F, *Leibniz, the Master-Building of Mathematical Notations*, in ISIS, 23, Vol VII,3.. Mars 1925, 412-429.

37 MAHNKE D : *Leibniz als Begründer der symbolischen Mathematik*, in *ISIS*, 30, (Vol IX, 2), Août 1926, 279-293.

38 "Tschirnaus exprimait l'opinion que la nouvelle terminologie et les nouveaux symboles [sq. de Leibniz] rendaient la science moins compréhensible. Il louait Viète pour avoir utilisé seulement les lettres de l'alphabet au lieu d'introduire d'autres caractères ressemblant à des monstres." CAJORI, ISIS, op.cit, 416.

durant, des dizaines de signes nouveaux, pour les éprouver et choisir les plus adaptés. On en trouvera un inventaire commenté et remarquablement documenté dans l'article cité de Cajori.

12.3. Extensions de systèmes préexistants.

De l'analyse des deux mutations entre systèmes, de Viète à Descartes, comme de Descartes de Leibniz, se dégage cette conclusion : à un moment donné, il est un certain système -ou état- préexistant, de connaissances mathématiques et de représentations symboliques associées. Pour pouvoir introduire un concept mathématique opératoire nouveau, c'est-à-dire étranger à l'état préexistant, il est nécessaire qu'il puisse se prêter au schéma épistémologique suivant : dans le concept, doivent d'abord pouvoir se repérer certains concepts préexistants qui le caractérisent : s'ils sont connus, le concept nouveau est lui-même connu. Ce sont les déterminants du nouveau concept, cependant que celui-ci en est le déterminé [39]. Les déterminants doivent aussi pouvoir être susceptibles d'une représentation par le corpus symbolique préexistant, à l'aide de signes, dénommés charactères. Le système préexistant aura donc dû disposer à son intérieur de relations d'interprétations, également préexistantes, non nécessairement univoques comme on a vu, mais qui s'exerceront depuis son registre symbolique vers son registre signifiant. Dès lors, seule aura à être neuve la loi d'organisation des concepts déterminants, qu'il faudra, à son tour, symboliquement traduire par un signe également neuf, que nous avons appelé la composition. Epistémologiquement, la procédure conduit donc à faire porter tout le poids de l' "étrangeté", c'est-à-dire de la nouveauté mathématique, sur l'organisation, quant au registre signifiant et sur la composition, quant au plan symbolique. L'ensemble, concepts déterminants et organisation, constituera dès lors le concept déterminé nouveau, dont la représentation s'organisera, de son côté, au moyen des charactères et de la composition. Pour ce faire, la procédure canonique, mathématiquement parlant, sera, si elle est possible, l'intégration de la composition dans le droit commun, c'est-à-dire de faire en sorte qu'elle soit, elle aussi, un assembleur. Un signe de plus, donc, dans le texte symbolique, nécessairement une Figure, mais qui offrira, à chacune de ses places, la substituabilité complète. Et donc en retour, le réexamen exhaustif des rapports de sens du concept nouveau avec tous les autres préexistants, et non pas seulement avec ses déterminants. Ainsi, le système nouveau recouvrira complètement l'ancien, en ce sens : il permettra la description complète de tous les

---

[39] Sur les concepts de "déterminants" et "déterminés" chez Leibniz, avec cette acception, on pourra par exemple consulter *Combinatoria*, in *Opuscules*, op.cit, page 544.

rapports, tant symboliques que signifiants, non seulement à l'intérieur du préexistant, mais aussi entre le concept nouveau et sa représentation d'une part, et le système préexistant d'autre part. Dès lors, le système nouveau aura vocation à devenir à son tour, dans le cadre d'une éventuelle nouvelle extension, lui même un préexistant.

Retournons en terminant au Nouveau Calcul des Différences et des Sommes de Leibniz. Dans le présent chapitre, nous nous sommes efforcés de démontrer le rôle du "jeu combinatoire", véritablement crucial dans cette construction mathématique qui fut, rappelons le, historiquement majeure. Dans ces conditions, le chapitre qui suit se propose de fournir le cadre théorique adéquat à une explication générale de ces procédures. Nous lui avons donné le titre général d'*Art Combinatoire*, non pas seulement en raison de ses origines, indiscutablement leibniziennes, mais surtout parce qu'à nos yeux, ce "jeu combinatoire" est en effet, aujourd'hui comme hier, un des "arts" du géomètre. Quant au sous-titre (*Substitutions et métamorphoses*), il renvoie au détail des procédures épistémologiques qui y sont recensées.

ANNEXE AU CHAPITRE 12

Annexe 1. Jeux de métamorphoses chez Jean Bernoulli.

juam ipse putaveris. Ut discrimen videas, calculum Tuum hic repeto. Posito $ddz = 0$

$$\int \overline{z^e d^m n} + e \int \overline{z^{e-1} d^{m-1} n dz} = z^e d^m n$$
$$- e dz \int \overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - ee dz \int \overline{z^{e-2} d^{m-2} n dz}$$
$$= - e . z^{e-1} d^{m-1} n dz$$
$$+ ee dz^2 \int \overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + e^3 dz^2 \int \overline{z^{e-3} d^{m-3} n dz}$$
$$= + ee . z^{e-2} d^{m-2} n dz^2$$

ergo

$$\int \overline{z^e d^m n} = z^e d^m n - e . z^{e-1} d^{m-1} n . dz + ee . z^{e-2} d^{m-2} n . dz^2$$
$$- e^3 . z^{e-3} d^{m-3} n . dz^3 \text{ etc.}$$

Haec, meo judicio, ita corrigi debent. Posito $ddz = 0$, erit

$$\overline{z^e d^m n} + e . \int \overline{z^{e-1} d^{m-1} n . dz} = z^e d^{m-1} n$$
$$- e dz \int \overline{z^{e-1} d^{m-1} n} - e . e - 1 . dz . \int \overline{z^{e-2} d^{m-2} n dz}$$
$$= - e . z^{e-1} d^{m-1} n . dz$$
$$+ e . e - 1 . \overline{dz^2} \int \overline{z^{e-2} d^{m-2} n} + ee - 1 . e - 2 \overline{dz^2} \int \overline{z^{e-3} d^{m-3} n . dz}$$
$$= + e . e - 1 . z^{e-2} d^{m-2} n d\overline{z^2},$$

ergo vera Series

$$\overline{z^e d^m n} = z . {}^e d^{m-1} n - e z^{e-1} d^{m-2} n dz + e . e - 1 . z^{e-2} d^{m-3} \overline{d} z^2$$
$$- e . e - 1 . e - 2 . z^{e-3} d^{m-4} n d\overline{z}^3 \text{ etc.}$$

Lettre de Jean Bernoulli à Leibniz, M.S, II, 171. Un exemple, typique à la fin du XVII^{e} siècle, de jeu combinatoire sur les signes, en dehors de toute signification (géométrique)préalable, enveloppant ainsi tant les assembleurs de l'ancien Calcul (Croix, Point, Trait), que le Blanc exponentiel cartésien, dûment littéralisé par Newton, qu'enfin le Dée et le Esse du Nouveau Calcul leibnizien. Dans sa facture et son inspiration, un tel texte symbolique, radicalement distinct désormais des écritures mathématiques du XVI^{e} siècle, est en vérité très proche de nos textes contemporains.

Deuxième partie :
Symbolique et invention.

Chapitre 13

L' Art combinatoire.

(Substitutions et métamorphoses).

13 . L'Art combinatoire.

1.13 Substitutions.

13.1.1 Substitutions en général.

Les chapitres qui précèdent ont décrit l'émergence de cette nécessité : l'exécution d'une opération appelée substitution, dont l'importance et le rôle combinatoire prééminents vont demeurer sans équivalent aucun dans le registre symbolique. Alors que dans le registre signifiant, on verra se découvrir en effet une diversité d'opérations, chaque jour plus étendue, (addition, quotient, différentiation, sommation, passage à la limite, clôture topologique, etc...), le registre combinatoire en effet, à l'exception des embranchements [1], ne connaîtra jamais qu'une seule opération : la substitution. Le présent chapitre est ainsi consacré à une analyse plus théorique de ce concept-clé, en spécifiant d'abord ce qui est exigé pour sa détermination complète et non ambiguë. Le terme de substitution est ici pris dans une acception méthodologique combinatoire, qui ne recouvre pas sa définition mathématique, usuelle depuis Galois, de bijection d'un ensemble fini. Tout en respectant, dans la présente étude, un cadre ainsi combinatoirement délimité, on n'y développera cependant pas une théorie qui en soit la plus générale possible. Pour faire bref, nous nous limiterons en effet à seulement décrire ce que fut au XVII^{e} siècle la pratique des substitutions : le remplacement d'une Lettre ou d'un Chiffre, et non pas d'une Forme quelconque [2]. Pour être précise, notre description demandera néanmoins, dans chacun des deux registres, rhétorique et symbolique, concepts et terminologie spécifiques. Sur le plan combinatoire d'abord, toute substitution se caractérise, comme on verra, par un lieu donné dans la Ligne, initialement occupé par une Lettre-Chiffre, et par une Forme quelconque donnée, dite substituante. La Lettre-Chiffre appartient nécessairement à une Forme originaire de niveau un, qui deviendra la substituée. D'un autre côté, l'originaire n'aura cependant été le plus souvent qu'un fragment seulement d'un texte mathématique de texture élaborée, et d'abord, une forme symbolique de niveau supérieur, dite source. Après substitution, se découvre ainsi une autre Forme, la transmuée.

---

1 La création de l'embranchement haut, attaché au lieu du Chiffre d'une exponentielle cartésienne, est en effet une opération combinatoire spécifique, commandant une syntaxe précise. De même pour l'embranchement bas, aujourd'hui associé à la notation indicielle, et introduit au XVIII^{e} xiècle par LAMBERT, J.H. dans un texte célèbre sur l'irrationalité de π, où il établit une démonstration par récurrence ("*Mémoire sur quelques propriétés remarquables des quantités transcendantes circulaires et logarithmiques* ". Mémoire de l'Académie des Sciences de Berlin [17] (1761), 1768, pp 265-322). Avec Van der Monde, la notation indicielle acquit complètement droit de cité à la fin du XVIII^{e} siècle.

2 Cette question est néanmoins évoquée en 13.2.7. (*Substitutions à la place).* Dans cette même section, on donnera aussi des exemples de substitutions au lieu d'un assembleur.

3. La prise en compte des significations conduit alors à ceci : toute Forme source renseignée s'interprète en un objet composé, dit objet source, cependant que la Forme transmuée, semblablement renseignée, s'interprète corrélativement en un autre objet composé, dit transposé de l'objet source. Ainsi, la substitution s'interprète-t elle comme une transposition d'objet : depuis l'objet source jusqu'au transposé. C'est donc par modification de procédure de l'un des objets constituants que s'opère la transposition. En un temps second, ce schéma se transposera de plein droit aux transmuées des propositionnelles, en s'appliquant à l'une ou l'autre de ses deux Formes organiques, aval et amont. Tous les concepts ici introduits, tant dans le registre combinatoire que signifiant, ne sont évidemment pas définis *per se*, mais toujours relativement à une substitution donnée.

Sur la forme, nous avons donc ici opté pour l'usage, usuel dans le commentaire mathématique, du terme *substitution* pour désigner une modification en un lieu seulement, alors que, comme nous l'indique J. Bouveresse, celui de *remplacement* est plus usuel en logique avec cette acception. En contrepartie, nous avons ci-dessous réservé le terme de *littéralisation* (*i.e* une métamorphose particulière) à ce qui est substitution à toutes les occurrences, là où l'usage logique préconiserait simplement *substitution*. Quant au fond, nous ne nous sentirons pas ici aucunement tenus de nous limiter à ces substitutions ou remplacements dans la seule perspective leibnizienne de la *salva veritate*, c'est-à-dire tels qu'ils sont usuellement opérés dans un cadre "logique". Dans les calculs logiques chez Leibniz ou Frege, la question est de savoir ce qui se passe dans une Forme composée ou une propositionnelle, après qu'on y ait remplacé dans une Forme intérieure, un premier signe par un second (ou par une Forme), tel que leurs objets aient la même substance. Cette problématique nous sera étrangère dans ce chapitre.

D'un autre côté, nous avons choisi de décrire le modèle explicatif du "jeu des substitutions" proposé dans ce chapitre sous une forme entièrement rhétorique, même au risque de paraître un peu long. Bien évidemment, nous aurions pu donner de ce qui va suivre une version mathématico-logique formalisée -et aussi bien plus brève- avec comme support un langage formel, une bi-partition entre les signes (Lettres-Chiffres et assembleurs), et utilisant à plein des jeux de composées d'application (ce ne sont pas ici, au sens mathématique, des "substitutions"). Nous n'avons cependant pas choisi ce mode d'exposé pour les trois raisons détaillées *supra* : d'une part le refus de l'anachronisme, ensuite l'évitement (autant qu'il est possible) d'un discours circulaire, enfin la constatation du caractère non pertinent de toute formalisation mathématique au regard de la description des méthodes d'invention, ce dernier aspect nous

3 De même, la transmuée par substitution d'une propositionnelle est encore une propositionnelle.

apparaissant comme majeur. Certes, toutes les actions combinatoires ci-dessous décrites, comme par exemple les Alpha-littéralisations ou les échanges, pourraient être formellement analysées. Mais elles ne peuvent, à notre sens, être véritablement interprétées que par le moyen d'un commentaire informel en langue naturelle. Par exemple, en partant de la Forme (A) : $a + 3.\,b$

nous décrirons ci-dessous la création, par substitution simple et immédiate, de la Forme (B):

$$a.(1+x) + 3.b.(1 + x + x^2)$$

L'objet de (A), apparemment initialement en soi sera ainsi devenu une simple instance (cas où la valeur du nombre de signe x est zéro) d'une classe extraordinairement plus large d'objets. Il y a ici tout un "jaillissement" de Formes enchâssées, qu'on peut encore prolonger avec (C) :

$a.(1+x) + 3.b.(1 + y + y^2)$ ou bien encore (D)

$$(a+ a^2).(1+x) + 3.b.(1 + y + y^2)$$

Des substitutions qui ne sont donc ni *salva veritate*, ni particulièrement intéressantes, ni même spécifiques dans le langage formel sous-jacent. Elle relèvent pourtant à notre sens d'un type mathématique crucial (un *plongement* Cf 13.2.5) sur le plan de l'invention.

Cela dit, on observera ensuite ci-dessous que l'exécution successive de plusieurs substitutions dans un même contexte, que nous appellerons métamorphose, fut -et demeure- une pratique quotidienne et universelle. De la sorte, le schéma épistémologique achevé du chapitre sera incarné dans la transformée par métamorphose d'une forme, symbolique d'abord, propositionnelle ensuite. Ainsi, toute métamorphose s'interprète-t-elle également comme une transformation, de l'objet source vers le transformé. Ainsi, dans ce lexique de l'Art combinatoire, a-t-on réservé le vocabulaire "transformationnel" au cas usuel des métamorphoses au sens propre, c'est-à-dire qui se constituent d'au moins deux substitutions, cependant que "transposition" et "transfiguration" s'appliqueront dans le cadre de schéma locaux, avec une substitution seulement.

Au-delà de ces considérations premières, véritablement générales, on s'attachera ensuite à analyser, sans prétendre être exhaustif, quelques grandes classes de métamorphoses et leurs interprétations, telles qu'elles furent largement utilisées, depuis le XVII^e^ siècle jusqu'à aujourd'hui, Leibniz, ici encore, ayant été un pionnier. Apparaissent alors sur le devant de la scène deux métamorphoses antagonistes, littéralisation et chiffrage, respectivement interprétées par extension et instantiation. Une dialectique majeure, qui se trouvera à son tour subsumée dans le cadre de la procédure du plongement, plus générale encore, et créatrice généreuse, tant d'objets que de problèmes mathématiques neufs.

13.1. 2 Substituées, substituantes.

Revenons au remplacement de x par (x + a) dans la Forme cartésienne élémentaire :

x^3 (exemple Alpha)

pour obtenir $(x + a)^3$ (Alpha Un)

Alpha sera la Forme originaire ou, brièvement, l'originaire : c'est à son intérieur en effet que s'exercera initialement la substitution. (x + a) sera la substituante, la substituée étant dénommée Alpha Un: c'est également une Forme symbolique. Avec la même originaire, le remplacement au lieu du 3, avec la Lettre a pour substituante, (c'est aussi une Forme, de degré zéro [4]) conduit à cette autre substituée :

x^a (Alpha Deux)

Avec la même originaire, on produira encore deux exemples [5] : au lieu du x, la substituante étant (a. x), et, au lieu du 3, la substituante étant (p + q), pour obtenir respectivement:

$(a. x)^3$ (Alpha Trois)

et

x^{p+q} (Alpha Quatre)

Pour être interprétée, Alpha doit être d'abord pourvue d'une Clé : x sera ainsi déclaré le signe d'un "nombre" inconnu [6]. Ainsi renseignée, la Forme originaire représente un objet élémentaire (Cf. 7.9), que nous dirons aussi originaire : sa procédure est une instruction élémentaire, l'élévation à la puissance troisième d'un nombre inconnu de signe x, et sa substance, comme dans tous les exemples du XVII^e siècle, un certain nombre, égal au résultat de la procédure. Dans chacun des cas, la substituée est une Forme nouvelle, de niveau deux, chaque fois renseignée, puis interprétée en objet, dénommé transfiguré (de l'objet originaire, par la substitution concernée). Ainsi, dans Alpha Un, si x et a sont tous deux les signes de nombres, respectivement inconnu et donné, la procédure est l'élévation à la puissance troisième d'un certain binôme [7], somme des deux nombres [8].

---

4 Cf. 7.9.

5 Nous avons précédemment distingué de façon claire entre le *lieu* et la *place*. Aussi parlerons-nous désormais sans ambiguïté dans la suite de "substitution *au lieu* du premier x" par exemple.

6 Comme à notre habitude pour le XVII^e siècle, nous prenons le terme " Nombre " dans l'acception leibnizienne des *Nouveaux Essais* in P.S, V, 142. Chapitre XVI, *Du Nombre*, §4. (Théophile).

7 Somme de deux termes.

8 Dans Alpha Deux, où a est interprété comme entier indéterminé, la procédure est l'élévation d'un nombre inconnu de signe x, à une puissance entière, arbitraire, mais fixée, de signe a. On reconnaît ici la dialectique de l'Indéterminé. Dans Alpha Trois, la procédure de l'objet transfiguré est l'élévation à la puissance troisième d'un produit de deux termes, et non plus d'une somme. Dans Alpha Quatre enfin, si p et q sont interprétés comme nombres entiers arbitraires, mais fixés, la procédure de l'objet transfiguré est l'élévation d'une grandeur de signe x à une puissance qui est la somme des deux entiers.

Ainsi, en première analyse, la substitution elle-même représentera la transfiguration, c'est-à-dire le mouvement qui fait passer de l'objet originaire au transfiguré : la dissociation de l'exponentié par le jeu de la multiplication dans Alpha Trois, ou bien celle de l'exposant par le jeu de l'addition dans Alpha Quatre. La transfiguration résulte donc chaque fois d'une modification de la procédure d'un des deux objets constituants [9]. Rappelons que, pour simple qu'elle nous apparaisse aujourd'hui, la dissociation pour obtenir par exemple le cube d'un binôme, ne se trouve pas chez Descartes, qui disposait pourtant de tous les éléments pour l'exécuter. On la trouve usuellemment, par contre, chez Newton et Leibniz, un exemple célèbre étant à nouveau l'*Epistola Prior* [10].

Ainsi, toute substitution s'opère à un lieu spécifié, occupé par une Lettre ou un Chiffre, et donc initialement à l'intérieur d'une Forme de niveau un. Dans le texte symbolique cependant, celle-ci n'est que l'un des composants d'une Forme achevée de niveau supérieur, la Forme source [11]. Nous examinons à ce propos cet exemple, repris en 13.5.4 :

$$\boxed{4 .(x + 1)^{3} - 4 . x^{3} - 1} \qquad \text{(Béta)}$$

sur lequel on effectuera séparément trois substitutions. D'abord le remplacement au lieu du second 1, la substituante étant a, pour obtenir Béta Un :

$$4.(x + 1)^{3} - 4. x^{3} - a$$ [12]

D'un autre côté, séparément sur la même Béta, au lieu du premier 3, avec n pour substituante, on obtiendra Béta Deux :

$$4.(x + 1)^{n} - 4. x^{3} - 1$$

L'originaire est donc ici $(x + 1)^{3}$. On agira enfin au lieu du second x, la substituante étant $(x^{5} + 2. x^{2} + 3. x + 4)$, pour obtenir Béta Trois :

$$4. (x + 1)^{3} - 4. (x^{5} + 2. x^{2} + 3. x + 4)^{3} - 1$$ [13]

Les trois originaires choisies, incluses dans la même source Béta, ont ainsi fourni trois substituées distinctes. A

9 Rappelons que la substance peut par contre en être inchangée (Cf. 7.9).

10 *Bw*, op. cit, 179. Cette correspondance, adressée à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg, sera étudiée en détail dans la seconde partie.

11 Plus simplement, source.

12 La Forme originaire est donc ici $((- (4. (x^{3}))) - 1)$, où l'assembleur est le second Trait.

13 L'originaire est donc x^{3}.

l'intérieur de Béta, les remplacements corrélatifs des originaires par chacune des trois substituées ont à leur tour produit trois Formes, Béta Un, Béta Deux, et Béta Trois, dénommées transmuées (de la source par les substitutions concernées). Les transmuées apparaissent ainsi comme des produits dérivés des substitutions [14].

Un schéma purement combinatoire, qui trouve cependant ses interprétations naturelles. La source étant en effet renseignée, c'est-à-dire pourvue du jeu des significations primitives définies *supra*, est interprétée en objet composé (objet source), dont la procédure et la substance résultent, comme d'ordinaire, d'une suite d'instructions portant sur d'autres objets constituants [15]. En termes modernes, la substance de l'objet source dans Béta est un certain polynôme réel à coefficients complètement spécifiés. L'objet originaire, cependant, était l'un des constituants de l'objet source. Dès lors, la modification de procédure et de substance induites chez lui par l'action de la substitution [16] aura mécaniquement induit une modification corrélative : ainsi, à la place de l'objet source, vient-il à son tour un nouvel objet, dit transposé : le mécanisme signifiant est exactement corrélatif de celui qui opérait dans le combinatoire. De la sorte, c'est l'objet transposé qui vient comme interprétation de la transmuée[17]. Nous avons tenu à distinguer entre transfiguration et transposition qui traitent, toutes deux, d'un changement dans l'objet source, selon la profondeur présumée de l'altération. La transfiguration, qui porte sur les originaires (Forme et objet) modifie l'un des constituants de la Forme originaire. Etant de niveau un, celle-ci n'en contient que deux au plus : elle se trouve donc, en principe, plus directement altérée que dans le cas de la transposition.

Ainsi Béta Un conduit-elle à un premier objet transposé de l'objet source, et dont la procédure, nouvelle, fait désormais intervenir un nombre donné, mais arbitraire, de signe a. En termes plus modernes, la substance de l'objet de Béta Un :

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - a$$

14 Par extension, on peut considérer la substituée elle-même, dans son rapport à l'originaire, comme un certaine transmuée, à l'intérieur d'une Forme de niveau un.

15 "Ajouter 1 à x ; constituer la substance de cet objet ; élever le premier résultat au cube ; constituer la substance de ce second objet ; multiplier cette seconde substance par quatre ; etc..."
(Cf. 7.9)

282 16 Ce par quoi il est donc transfiguré.

17 Ainsi, à "transmué", très combinatoirement connoté, avons-nous fait exceptionnellement correspondre "transposé" dans le registre des significations.

est un certain polynôme réel, avec, comme dira Leibniz, un paramètre [18] dans ses coefficients, qu'on regarde comme une généralisation du polynôme source. On a en effet gagné en extension par le jeu, désormais libre, de la substance du nombre de signe a, qui est arbitraire, mais fixée. En retour, le polynôme initial, objet de Béta :

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1$$

sera considéré comme un cas particulier du polynôme transposé, simple instantiation numérique obtenue dans le cas où la substance du nombre de signe a est égalée à 1.

D'un autre côté, Béta Deux :

$$4.(x+1)^n - 4.x^3 - 1$$

conduit à un autre objet transposé, dont la substance est un autre polynôme réel, dont le degré est cette fois un nombre entier indéterminé, de signe n, mais à coefficients entièrement spécifiés. On regardera aussi ce polynôme, comme une extension du polynôme initial, dans une acception toutefois différente de la précédente : c'est le degré du premier terme qui est cette fois devenu arbitraire, mais fixé. Ici encore, le polynôme source sera une instantiation numérique de ce (second) transposé.

De façon générale donc, chaque transmuée renseignée sera respectivement interprétée par un nouvel objet composé, transposé de l'objet source par le jeu de la substitution, et obtenu à partir de celui-ci par une modification chaque fois différente, dans la chaîne des instructions, de la procédure d'un des objets constituants. Ces considérations générales doivent être précisées sur un double plan. D'abord, au regard de nos définitions précédentes, nos conclusions ne sont exactes qu'au prix de l'élision des signes de délimitation. En effet

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1 \qquad \text{(Béta)}$$

est, au sens strict, un assemblage, et non une Forme. En procédant à la due complétion pour obtenir la véritable originaire, on a donc :

$$((4.((x+1)^3)) - ((4.(x^3)) - 1))$$

Si, après substitution, l'on en fait de même pour Béta Deux, on obtient :

$$((4.((x+1)^n)) - ((4.(x^3)) - 1))$$

qui est ainsi la véritable transmuée.

[18] Leibniz fut l'un des premiers géomètres à utiliser le terme de *paramètre*, par exemple dans l'article de 1692 sur les enveloppes, in M.S, V, 268. Cf. 1.7.5.5 *supra*.

D'autre part et pour faire bref, nous avions jusqu'ici, indiqué chaque substitution au moyen d'une lettre dans la Ligne, le

x

dans Béta Trois par exemple. Il est cependant clair que ce qui repère véritablement la substitution, est son lieu d'application, autrement dit la position dans la Ligne où se place la substituante, et non pas le x, qui ne sert qu'à l'indiquer. La désignation peut même être ambiguë, s'il y a plusieurs occurrences du signe x, comme dans notre exemple; il nous a alors fallu préciser duquel il s'agit, en l'occurrence le second. Pour définir une substitution, il est donc impératif de désigner un lieu dans la Ligne, initialement occupé par une Lettre-Chiffre, signe qui sera dit support. D'un autre côté, l'auteur dispose à son gré de la substituante, forme symbolique spécifiée quelconque, c'est-à-dire, d'une part, sans rapport nécessaire avec la nature du support, d'autre part de niveau arbitraire. La substituante pourra ainsi, le cas échéant, être elle aussi organisée autour d'une Lettre ou d'un Chiffre. Toute substitution sera donc dans les faits exactement et complètement déterminée par deux éléments et deux seulement : son lieu et la substituante. En première analyse, une substitution est alors l'opération purement combinatoire par quoi la substituante vient, dans la Ligne, remplacer le support.

D'un autre côté, le nombre de signes dans la substituante est, en règle générale, plus important que celui du support, qui n'en contiendra jamais qu'un. Dans ces conditions donc, après substitution, la substituante déborde le plus souvent le lieu du support. On peut alors décrire la situation combinatoire en considérant que le support, c'est-à-dire la Lettre initiale,

x

par exemple, a été à son tour, dûment complété, suivant

(x)

pour obtenir une Forme de niveau zéro [19], les parenthèses étant ainsi les Délimitants du support. On considère alors que, dans la Forme (x), la Lettre x aura aussi créé deux places ouvertes, amont et aval. En premier lieu, la substituante vient alors occuper le lieu du support. De celui-ci, dès lors effacé, il ne restera désormais plus trace. La même substituante, cependant, viendra occuper aussi certains lieux consécutifs voisins, dans les deux places ainsi ouvertes, amont et / ou aval, selon les effectuations. Ceci obligera donc, dans la Ligne, à un réaménagement [20] ultérieur quant

19 Cf.7.9.

20 La création de places ouvertes n'est pas ainsi le fait des seuls assembleurs. La construction d'un faisceau des concepts combinatoires nécessaires à la description exhaustive et précise du *réaménagement après substitution* d'un texte symbolique est, à notre sens, relativement complexe, contrairement aux apparences ; nous n'en proposerons pas ici une étude, secondaire par rapport à nos objectifs dans cette thèse. De façon bien plus brève, on pourrait certes en construire une modélisation mathématique en termes modernes, mais qui utiliserait de façon circulaire texte et écriture symbolique.

à leurs lieux, du reste des signes, c'est-à-dire ceux qui se trouvaient en dehors des Délimitants du support. Un réaménagement qui achève de faire disparaître le support et l'écriture ancienne. En effet dans le nouveau texte symbolique, comme Béta Trois :

$$4.\,(x+1)^{3} - 4.\,(x^5 + 2.\,x^2 + 3.\,x + 4)^{3} - 1$$

même l'ancien lieu du support n'est plus apparent pour le lecteur nouveau du texte.

13.2. Métamorphoses.

13.2.1 Métamorphoses en général.

On a décrit comment Béta Un et Béta Deux résultent de deux substitutions séparées sur une même source Béta, les interprétations épousant ensuite une dialectique naturelle et féconde entre cas particuliers et structures générales. Ainsi a-t-on obtenu deux structures générales distinctes, objets transformés d'un même objet source. Inversement, l'objet source sera une réalisation particulière commune des deux modèles généraux, dans deux perspectives distinctes. Une méthodologie qui peut évidemment s'étendre à un nombre quelconque de modèles généraux, l'image étant celle d'un éventail dont le centre serait l'objet source commun.

Il apparaît pourtant que ce schéma d'exécutions séparées de diverses substitutions, à propos d'une même source, si elle se rencontre parfois, n'est aucunement la règle. L'observation du calcul, depuis le XVII^e siècle jusqu'à aujourd'hui, conduit au contraire à considérer comme une pratique universelle l'effectuation successive de plusieurs substitutions. Nous en donnerons deux exemples, de nature distincte.

Leibniz découvrit le premier, sous la plume de Newton, dans l'*Epistola Prior* de Juin 1676 [21], qui était :

$$(P+Q)^{\frac{m}{n}}$$

21 *Bw*, op. cit, 179. Cette correspondance, adressée à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg, sera étudiée en détail en 14.1.1.

donc obtenu, à partir d'Alpha *supra,* par l'exécution d'une succession de deux substitutions, aux lieux de la Lettre et du Chiffre, la substituante étant chaque fois une Forme de niveau un [22]. Le jeune Leibniz, qui reçut avec surprise cette transmuée, initialement dépourvue de significations pour lui, en découvrit ensuite la pertinence, la profondeur, et la fécondité, avant de la considérer comme une pièce maîtresse dans la constitution de sa pensée mathématique. Ce point crucial sera analysé en 14.1.1.

Comme second exemple, nous reprenons Béta :

$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1$

sur laquelle on effectue *successivement* les deux substitutions envisagées ci-dessus [23] pour obtenir [24]:

$4.(x+1)^n - 4.x^3 - a$ (Béta Un-Deux)

Comme on voit sur nos deux exemples, l'exécution successive dans une Forme de deux substitutions -et donc d'un nombre quelconque- est une opération combinatoirement permise par la syntaxe symbolique : on l'appellera, en hommage à Leibniz, une métamorphose. Le terme se trouve dans une lettre [25] adressée par Leibniz, probablement autour de 1684, à l'éditeur du Journal des Savants. Leibniz très fier de sa résolution de la Quadrature Arithmétique du Cercle, explique son succès par l'emploi d'un certain changement de variables, qu'il a, dit-il essayé au hasard au milieu de nombre de "Métamorphoses" :

> "Pour cet effet, j'ai fait le dénombrement de quantités de Métamorphoses, et les ayant essayées par une combinaison très aisée (...), j'ai trouvé bientôt le moyen que je m'en vais expliquer." (M.S, V, 90) [26]

---

22 On peut ainsi décrire la métamorphose: dans la Forme cartésienne initiale :

$$a^3$$

on substitue (p + q) au lieu du a. La substituée est

$$(p+q)^3.$$

Sur celle-ci, on opère une nouvelle substitution, cette fois au lieu du 3, avec pour substituante, la forme

$$\left(\frac{m}{n}\right)$$

La nouvelle substituée est :

$$(p+q)^{\frac{m}{n}}$$

23 D'abord la substitution au lieu du 1, la substituante étant a. Puis la substitution au lieu du premier 3, la substituante étant n.

24 Nous avons désigné par Beta Un-Deux la transmuée finale, *i.e* celle de Beta Un par la seconde des substitutions.

25 M.S, V, 89.

26 La lettre de Leibniz ne contient aucune description précise de sa technique mathématique. Cependant, en termes modernes, le changement de variables retenu s'écrit :

$$x = \frac{2az^2}{a^2+z^2}$$

Ainsi, les métamorphoses, au sens leibnizien sont-elles des essais systématiques, à l'aveugle, de substitutions successives : ce que précisément nous avons pris ici pour définition. Dans nos exemples, il y a eu chaque fois deux substitutions successives, donc une première transmuée, qui devient source pour la seconde substitution, après quoi vient la transmuée finale. Toute métamorphose est ainsi exactement définie par une suite ordonnée de lieux, et de substituantes corrélatives [27]. Il est clair que si toutes les substitutions constituant une métamorphose donnée opérent à l'intérieur du cadre d'une même source, la métamorphose en donnera ultimement une autre Forme, dite transformée. Il en sera de même pour une propositionnelle, cette question étant analysée plus loin.

Sur le plan signifiant, la Forme transformée sera dite représenter l'objet transformé, et la métamorphose elle-même, la transformation d'objet [28]. Dans l'*Epistola Prior* où l'exposant est un quotient, la substance de l'objet transformé ne va pas de soi et sera examinée plus loin. Dans Béta Un-Deux par contre, cette substance sera usuellement un certain polynôme réel de degré n, avec, dans ses coefficients, un paramètre de signe a. Béta Un-Deux introduit ainsi à ce type fondamental de métamorphoses, où c'est chaque fois une Lettre (et non une Forme, ni un Chiffre) qui vient comme substituante: il sera ci-dessous décrit dans le cadre plus général de la littéralisation.

On l'a déjà observé : ni l'une, ni l'autre des métamorphoses sur Béta, n'aurait pu se trouver chez Descartes, où les seules exponentielles à apparaître offrent un Chiffre pur comme exposant. Ainsi, la métamorphose de Béta vers Béta Un-Deux, combinatoirement permise par le système de Descartes n'aurait pas eu de signification pour lui, et il n'en utilisa jamais de semblable. Et, pour simple qu'elle nous apparaîsse aujourd'hui, la substitution littérale au lieu du Chiffre, apparut pour la première fois en Juin

---

27 Dans notre exemple, où il y a deux substitutions successsives, l'indication des lieux doit tenir compte du réaménagement éventuel des emplacements, consécutif à la première substitution. Cette petite difficulté technique peut faire l'objet d'un traitement et d'une description mathématique que nous ne donnerons pas ici.

28 Par le jeu des Clés d'interprétation, toute métamorphose sera en effet interprétée comme succession de transpositions d'objets, exécutée dans un ordre prescrit. Nous avons ici encore distingué, cette fois entre transposition et transformation : la transposition prend acte de l'effet induit par une susbstitution simple. La transformation, au contraire, prend en compte le cadre général dans lequel est effectuée une métamorphose, c'est-à-dire une succession d'un nombre quelconque de substitutions quelconques.

1676 seulement, toujours dans l'*Epistola Prior* de Newton, qui introduisit ainsi des exposants à la fois fractionnaires et littéraux [29]. D'un autre côté, nous verrons aussi *infra* comment l'exemple des quantités imaginaires fut historiquement le premier qui constitua, devant le géomètre, des Formes sans significations. Placé devant cette occurrence de signifiants sans signifiés, Leibniz, dans une attitude radicalement non-cartésienne, en tira aussitôt cette leçon surprenante et féconde : proposer une autre Forme, exponentielle celle-là, obtenue combinatoirement par substitution, mais toujours sans signification. Une théorie déjà évoquée plus haut sous le nom d'exponentielle "leibnizienne", et que nous analysons en 14.2.2 [30].

13.2.2 Substitutions à la Lettre. Chiffrages et instantiations.

13.2.2.a Cas des Formes.

L'oeuvre de Leibniz offre les premiers modèles historiques de substitution à la Lettre dans une Forme [31], dont nous donnerons trois exemples dans cette section. Dans un contexte de "quantités imaginaires" et de sa prétendue "sixième opération de l'algèbre" [32], Leibniz voulait expliquer la résolution des équations du troisième degré par la méthode de Tartaglia-Cardan-Bombelli. Dans la source :

$$x^3 + p.\,x - q \qquad \text{(Delta)}$$

Leibniz fait ainsi agir la substitution à la Lettre x, la substituante étant (y + z). Dans sa terminologie, il dit qu'il "pose" :

$$x = y + z$$

Ceci pour signifier qu'il exécute deux substitutions successives au lieu de chaque x, pour obtenir :

$$(y + z)^3 + p.\,(y + z) - q$$

Cette métamorphose s'interprète comme un changement de variables en vue de résoudre l'équation cubique. Epistémologiquement, le commentaire est en effet celui-ci : l'inconnue ancienne est d'abord "coupée" (*secta)* en deux parties, elles aussi inconnues, de signes y et z. Ceci concourt apparemment à une

---

[29] *Bw,* op. cit, 179.

[30] Cf. aussi sur ce point SERFATI M, *Quadrature du cercle...,* op. cit.

[31] *De Resolutionibus aequationum cubicarum triradicalium, de radicibus realibus, quae interventu imaginarium exprimuntur, deque sexta quadam operatione arithmetica.* M.S, VII, 145.

[32] En termes plus modernes, l'extraction de radicaux portant sur un couple d'imaginaires conjugués, une opération rendue indispensable, selon Leibniz, par l'examen du cas "irréductible " de Cardan.

complexité accrue, puisqu'à une quantité inconnue (de signe x), le procédé en fait correspondre deux. La méthode permet cependant de créer un degré de liberté dans la gestion de l'inconnue, et donc de gagner en marge de manoeuvre : il sera en effet désormais possible d'astreindre les deux nouvelles inconnues à une contrainte supplémentaire, ce qui sera l'élément décisif dans la résolution. On commence donc par décider de perdre, pour regagner ensuite. Dans une lettre célèbre à Huygens [33], Leibniz analyse admirablement cette démarche épistémologique de "sacrifice volontaire" Dans d'autres travaux, Leibniz, emporté par son esprit de système, essaiera même de couper l'inconnue en trois [34] : en dehors de toute considération de signification quant à semblable tripartition, il disposait alors de deux degrés de liberté. Il est bien clair, d'une part que ces substitutions n'ont initialement aucune signification intrinsèque, d'autre part qu'elles auraient été inconcevables dans l'écriture rhétorique des mathématiques. Aujourd'hui au contraire, et par un apprentissage spécifique, le plus souvent inconscient, nous y sommes si complètement habitués dans l'écriture symbolique, que nous éprouvons au contraire de grandes difficultés à comprendre ceux, tels les géomètres du XVI^e^ siècle, qui ne l'utilisaient pas, et en premier lieu Cardan, le propre inventeur de la résolution des cubiques. Ainsi la pratique des métamorphoses est-elle à son tour devenue une figure transcendentale de la connaissance mathématique. Notons aussi que, depuis Leibniz, les substitutions à la Lettre et les changements de variables se repèrent le plus souvent à la mention "on pose" (*ponatur).*

Par analogie avec l'exemple Delta, nous définirons alors une substitution à la Lettre comme une métamorphose particulière opérant à l'intérieur d'un contexte spécifié à l'avance par l'auteur, et qui sera, soit une forme symbolique, soit une propositionnelle. Caractérisée par la donnée d'une Lettre et d'une substituante, elle est déterminée par cette procédure de substitution universelle : partout, à chaque lieu occupé par la Lettre dans le contexte, on fera venir la substituante.

Un cas particulier, simple et important, de substitution à la Lettre, est celui où la substituante est un Chiffre. Nous reprenons Béta Un *supra* :

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - a$$

33 *Bw*, op. cit, 553.

34 "*radis incognitae in partes sectae, ut* x *aequ*. a = b + c ". Ainsi Leibniz indique-t-il un changement de variables à Tschirnaus. *Bw*, op. cit, 521.

où l'on substitue à la Lettre x, la substituante étant le Chiffre (9, 5) :

$$4.\,((9,\,5) + 1)^{3} - 4.\,(9,\,5)^{3} - a \qquad \text{(Béta Quatre)}$$

La source, initialement constituée pour partie de lettres, a ainsi été partiellement débarrassée de ceux-ci. Ce type, où un Chiffre vient partout remplacer une Lettre, sera dit chiffrage de la source. Dans notre exemple, l'interprétation sera une instantiation numérique de la substance de l'objet : d'un polynôme de degré trois, on prend une certaine valeur numérique, la substance de x étant égalée à 9,5 [35]. C'est à l'évidence la méthode employée lorsque, disposant d'un canon général pour résoudre une question, le géomètre en tire une conséquence numérique particulière. Une question d'interprétation qui sera reprise dans un cadre élargi en 13.2.4. Tout chiffrage est ainsi exactement déterminé, à l'intérieur d'un contexte, par la donnée d'une Lettre et d'un Chiffre. Il est donc une substitution à la Lettre particulière, et elle-même une métamorphose d'un type spécifique.

Dans nos deux exemples de substitution à la Lettre, la substituante a été, soit une Forme, soit un Chiffre, qui ne figuraient pas dans la source. Il en va différemment ci-dessous, où la source est :

$$10.\,x^{3} - 6.\,x^{2}.\,b + 4.\,x.\,b^{2} - 7.\,b^{3} \qquad \text{(Epsilon)}$$

et la transformée :

$$10.\,b^{3} - 6.\,b^{2}.\,b + 4.\,b.\,b^{2} - 7.\,b^{3} \quad \text{(Epsilon Un)}$$

Convenablement renseignée, Epsilon s'interprète en un certain polynôme de degré trois, à coefficients dépendant d'un paramètre (de signe b) ; sur elle, on a effectué la Substitution à la Lettre x, la substituante étant b. Sur le plan combinatoire, la métamorphose s'analyse comme une uniformisation (littérale), depuis la Lettre x vers la Lettre b, la transformée, n'offrant plus en effet ici au regard qu'une seule Lettre [36].

Sur le plan signifiant, la transformée découvre ce qu'il est advenu du polynôme lorsque, par hypothèse, la substance de l'inconnu a été rendue égale à celle du donné. C'est donc une instantiation, cette fois "littérale", c'est-à-dire indéterminée. Pour

35 Sa valeur est la même que celle de 1201- a.

36 Sur le plan combinatoire, toute uniformisation se traduit ainsi par la diminution d'une unité du nombre de lettres distinctes dans la source.

continuer, on observe que la substance, dans Epsilon Un, de l'objet transformé, coïncide avec celle de :

$$10.\, b^3 - 6.\, b^3 + 4.\, b^3 - 7.\, b^3 \qquad \text{(Epsilon Un-Prime)}$$

Ensuite, que ce dernier a pareillement même valeur que :

$$b^3 \qquad \text{(Epsilon Un-Seconde)}$$

En sorte que la question posée reçoit cette réponse simple : sa substance est alors le cube du donné. La séquence de nos deux dernières interprétations appelle un commentaire nécessaire. Sur le plan combinatoire en effet, les trois Formes Epsilon Un, Epsilon Un-Prime et Epsilon Un-Seconde sont bien évidemment distinctes. On a cependant considéré qu'elles avaient même substance. Une conclusion qui est une conséquence du seul "calcul", si simple ici soit-il : elle est donc le produit d'opérations, non pas combinatoires, mais purement signifiantes, à la fois mathématiques et logiques, et qui relèvent en fait, tant de la Clé d'interprétation, par les significations données aux Lettres et aux assembleurs, que des lois du calcul et des règles d'inférence. Ce que nous appellerons globalement dans la suite le "jeu du calcul". Dans ces conditions donc, c'est le seul jeu du calcul qui a permis d'assurer que les objets des Formes :

$10.\, b^3 - 6.\, b^3 + 4.\, b^3 - 7.\, b^3$
et
b^3

ont même substance : en d'autres termes, qu'ils sont équi-valents (équi-substantiés). Ainsi, dans ce très simple exemple, et pour pouvoir conclure, nous ne nous sommes pas limités à notre couplage usuel entre les registres symbolique et signifiant, mais avons été tenus à un parcours strictement interne aux significations.

13.2.2.b Cas des propositionnelles.

Schéma et terminologie des substitutions et métamorphoses se transposent simplement, depuis les Formes vers les propositionnelles. Chaque propositionnelle contient en effet exactement deux Formes organiques achevées, amont et aval. Toute métamorphose sur l'une et/ou l'autre sera regardée comme métamorphose de la propositionnelle [37]. Ainsi, la procédure de

[37] La propositionnelle initiale sera aussi appelée source ; elle sera remplacée par la transformée. L'objet de la propositionnelle source deviendra celui de la propositionnelle transformée : on le dira aussi transformé.

l'uniformisation, exposée sur une Forme, vaut aussi bien pour les propositionnelles. Reprenons ici Epsilon, en l'insérant dans la propositionnelle *Epsilon* [38]:

$$10.\ x^3 - 6.\ x^2.\ b + 4.\ x.\ b^2 - 7.\ b^3 = 1$$

interprétée en équation algébrique de degré trois, où est recherché un nombre inconnu de signe x, le nombre de signe b étant arbitraire, mais fixé. La même uniformisation que *supra*, de x vers b, conduit à *Epsilon Un* [39]

$$10.\ b^3 - 6.\ b^3 + 4.\ b^3 - 7.\ b^3 = 1$$

représentant, elle aussi, une équation, la question étant cette fois : pour quelles valeurs de la grandeur de signe b, le donné est-il égal au requis ? Une interprétation, pourtant naturelle, qui introduit cependant mécaniquement une nouvelle Clé : elle fait désormais de la grandeur de signe b une inconnue recherchée [40]. Comme plus haut, on considérera, par le jeu du calcul, qu'*Epsilon Un* est de même substance que *Epsilon Deux* :

$$b^3 = 1,$$

une équation de degré trois donc, dont les géomètres du début du XVII^e^ siècle considéraient, selon les Clés alors usuelles, qu'elle ne pouvait admettre que l'unité pour seule solution [41]. Ainsi se trouve complètement résolue dans le contexte la question posée.

13.2.3 Substitutions au Chiffre. Littéralisations et canonisations.

Symétriquement, nous définirons une substitution au Chiffre comme la métamorphose par quoi, partout dans une même forme, symbolique ou propositionnelle, une certaine substituante vient remplacer un même Chiffre, le cas le plus intéressant, appelé littéralisation, étant celui où la substituante est une Lettre.

---

38 Dans leurs dénominations, nous distinguerons désormais par des italiques, les propositionnelles d'avec les formes symboliques.

39 Par extension, nous parlerons désormais d'équation transformée.

292

40 Cf. 7. 6.

41 Si b est interprété comme un nombre complexe, il y a au contraire trois solutions $e^{\frac{2ik\pi}{3}}$ $k \in \{0, 1, 2\}$.

13.2.3.a Littéralisation des Formes.

Nous prendrons ici deux exemples. Le premier historiquement important, est lié à la tentative, chez Leibniz et Tschirnaus, de résolution des équations de degré supérieur ou égal à cinq. A la fin du XVII^{e} siècle en effet, les techniques pour les équations des troisième et quatrième degré, élaborées au siècle précédent par Cardan et Bombelli, et exposées sous forme rhétorique et géométrique, étaient désormais bien acquises par les géomètres, et dès lors représentées et intégrées dans le cadre nouveau de l'écriture symbolique : on a décrit les efforts de Leibniz en ce sens. Descartes fut ainsi le premier en 1637 à écrire en termes symboliques la formule de Cardan pour les équations cubiques [42]. Leibniz, de son côté, qui découvrit à Paris la théorie des équations algébriques par la lecture de l'*Ars Magna* et de l'*Algebra*, en fit sur le champ un usage étendu, inaugurant sur le sujet une collaboration avec Tschirnaus [43]. Alors qu'en ce domaine, les géomètres de son temps faisaient usuellement référence à l'*Ars Magna* de Cardan, Leibniz, avec un sens historique qui ne lui fit jamais défaut, reconnut toujours l'importance primordiale de l'*Algebra* de Bombelli [44]. Leibniz, qui considérait Bombelli comme un "maître de l'art analytique" apprécia particulièrement ses recherches sur le cas irréductible de Cardan [45]. Néanmoins, comme le remarquera Lagrange [46], la résolution des équations du cinquième degré et au-delà, se présentait à ce moment comme une nouvelle et redoutable énigme, semblable à celle des équations cubiques deux siècles plus tôt. Si toutes les tentatives avaient jusque-là échoué, Leibniz, comme la plupart des géomètres

---

42 Dans le Livre III de la *Géométrie*, A.T, VI, 472.

43 Cf. HOFMANN J,*The meeting with Tschirnaus*,, in *Leibniz in Paris*, op. cit, 164 - 186.

44 C'est en lisant Bombelli que Leibniz s'était initié à la théorie des équations comme il l'explique à Huygens dans une lettre à laquelle il a joint un exemplaire de l'*Algebra* . Lettre I de Leibniz à Huygens. *Bw*, op. cit, 547. En retour, Huygens écrivit à Leibniz, en signe d'admiration : "Vous avez plus fait que Bombelli." (idem, 559)

45 idem, 565.

46 En 1770, un siècle après Leibniz, Lagrange notait :
"A l 'égard de la résolution des équations littérales, on n'est guère plus avancé qu'on ne l'était du temps de Cardan, qui le premier a publié celles des équations du troisième et du quatrième degré. Les premiers succès des Analystes italiens dans cette matière paraissent avoir été le terme des découvertes qu'on pouvait y faire ; du moins est-il certain que toutes les tentatives qu'on a faite jusqu'à présent pour reculer les limites de cette partie de l'Algèbre n'ont servi qu'à trouver de nouvelles méthodes pour les équations du troisième et du quatrième degré, dont aucune ne paraît applicable, en général, aux équations d'un degré plus élevé." LAGRANGE, J.L *Réflexions sur la résolution algébrique des équations.* Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences et Belles-lettres de Berlin, 1770, = Oeuvres, III, 205.

Soixante ans après ces réflexions pessimistes, le "Premier Mémoire" d'Evariste GALOIS de 1830 vint éclaircir complètement la situation, montrant l'impossibilité de la résolution par radicaux de ces équations en général, et fournissait en même temps une condition nécessaire et suffisante générale pour qu'une équation irréductible donnée, de degré premier, soit, pour sa part, soluble. (GALOIS E : *Sur les conditions de résolubilité des équations par radicaux* = J.M.P.A, 1846, 417- 433).

du temps, était bien convaincu de l'existence des solutions par radicaux. Sa démarche fut cependant très spécifique : il pensait, qu'en un premier temps tout au moins, il lui suffirait, au moyen d'essais effectués systématiquement, au hasard, de deviner habilement la structure de la solution, c'est-à-dire sa Forme, comme l'avaient fait en leur temps Del Ferro et Tartaglia [47] pour les équations cubiques : autrement dit, en termes leibniziens, d'appliquer à l'énigme sa méthode de l'Art Combinatoire. Par sa lettre à Jacques Bernoulli du 24 septembre 1690 [48], Leibniz indique en effet comment la Combinatoire peut servir, selon lui, à résoudre les équations de degré supérieur au quatrième :

> "De ipsa Algebra Speciosa per artem combinatoriam perficienda spero dare quiddam ejusque ope explicare radices aequationum altiorum, nam aliae viae vel non procedunt vel sunt nimis prolixae, combinationibus autem Algebraicae expressiones mire contrahuntur. Et omnino Algebra est scientia ispsi combinatoriae (...) subordinata."

La résolution des équations du cinquième degré fit ainsi l'objet d'une recherche que Leibniz mena en une véritable collaboration avec Tschirnaus, commencée à Paris, et qui se poursuivit jusqu'à leur fâcherie en 1683. Toutes leurs tentatives étaient dirigées par l'examen visuel de la structure véritablement particulière de "la" solution de l'équation du troisième degré [49] :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt[2]{b}} + \sqrt[3]{a - \sqrt[2]{b}} \qquad \text{(Eta)}$$

Cette somme de deux termes, dont chacun est une racine cubique, soit d'un binôme (somme de deux termes, dont l'un est une racine carrée), soit de son apotome [50] (différence des mêmes) ne se rencontrait en effet que dans la résolution de cette équation. Et en vérité, dès avant Leibniz, cette Forme spécifique avait excité l'intérêt des géomètres, Descartes en particulier [51]. L'idée de Leibniz fut en un premier temps de pure analogie : pour résoudre les

47 Cf. sur ce point notre article : SERFATI M, *Le secret et la Règle*, op. cit.

48 M.S, III, 20 (Volume 2). Cf. sur ce point COUTURAT, *Opuscules*, op. cit, 288.

49 Dans le cas de l'équation x3 + px = q, on verra ci-dessous en 13.2.6, les valeurs des nombres de signes a et b, en fonction de ceux de signes p et q.

50 Les deux termes, présents chez Euclide, sont repris par Cardan avec cette même signification.

51 Cf. COSTABEL P., *Démarches originales de Descartes savant*, op. cit.

équations de degré n, essayer une littéralisation au Chiffre 3, la substituante étant n, avec pour transformée [52] :

$$\sqrt[n]{a + \sqrt[2]{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt[2]{b}} \qquad \text{(Eta Un)}$$

Ainsi obtenait-il une extension véritable de la solution de Cardan. Par exemple, pour le degré cinq :

$$\sqrt[5]{a + \sqrt[2]{b}} + \sqrt[5]{a - \sqrt[2]{b}}$$

Leibniz communiqua à Tschirnaus le principe de cette tentative, dont le calcul cependant montra l'échec [53]. Ni Leibniz, ni Tschirnaus, cependant, ne se découragèrent, chacun entreprenant alors des tentatives combinatoires à sa façon. Tschirnaus essaya la métamorphose, constituée d'une double substitution au Chiffre. Opérée sur Eta, les Chiffres étant 2 et 3 et les substituantes n et p respectivement, elle fournit [54] :

$$\sqrt[n]{a + \sqrt[p]{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt[p]{b}} \qquad \text{(Eta Deux)}$$

Ce type fondamental de métamorphose, où une Lettre vient ainsi partout remplacer un Chiffre, sera désormais appelé littéralisation d'une Forme. Selon la Clé usuelle, n et p représenteront des entiers naturels indéterminés, et la transformée Eta Deux sera interprétée en un objet nouveau, défini pour tous les couples d'entiers, et englobant l'objet source de la formule de Cardan. Le procédé conduit donc très simplement, par le jeu de l'abstraction "littérale" de propositions numériquement spécifiées, à la constitution d'objets-extensions, à portée universelle.

Une variante, pour les équations de degré n, plus directement encore inspirée de la source Eta [55], conduisit à Eta Trois :

$$\sqrt[n]{a + \sqrt[n-1]{b}} + \sqrt[n]{a - \sqrt[n-1]{b}}$$

et ainsi, à une autre extension encore du résultat de Cardan, d'inspiration toutefois différente de Eta Un.

Le calcul montra à nouveau la vanité des espérances des deux amis. Faisant preuve d'une intelligence mathématique profonde, actuelle, Leibniz se dirigea alors dans une

52 Cf. HOFMANN J, op. cit, 146.
53 Toutes les équations réduites de degré cinq n'admettent pas de solution de cette forme.
54 Cf. HOFMANN J, op. cit, 171.
55 Où les valeurs des entiers de signe p et n, sont 2 et 3 respectivement.

autre direction : au lieu de continuer à vainement rechercher les solutions des équations *quelconques* du cinquième degré [56], au moyen d'une des transformées de la source, Leibniz, en sens inverse, s'intéressa aux équations *particulières* du cinquième degré dont étaient solutions ces objets transformés neufs, créés par Tschirnaus et lui-même, dans Eta Un et Eta Trois par exemple. Il obtint ainsi ce qu'on appela les équations de Cardan généralisées. [57]

Nous prendrons en terminant Gamma comme un autre exemple source :

$$6.\,(4,53)^4 - 2{,}7.\,(4,53)^3 + 14.\,(4,53)^2 - 8.\,(4,53) - 12$$

avec pour transformée Gamma Un :

$$6.\,a^4 - 2{,}7.\,a^3 + 14.\,a^2 - 8.\,a - 12 \qquad [58]$$

La transformation se sera ici résumée par la création, au-delà d'un lot d'exemples numériques spécifiés, d'un objet mathématique nouveau : un certain polynôme [59].

De nos deux exemples, se dégage à l'évidence ce premier intérêt des littéralisations : à partir de considérations numériques considérées comme contingentes, le procédé constitue un nouvel objet, en en dégageant l'essence. En première analyse donc, la transformation d'objet associée à toute littéralisation sera une certaine extension d'un objet mathématique.

13.2.3.b Alpha - littéralisation d'une Forme.

La confrontation des deux exemples Eta et Béta Quatre *supra*, met en évidence cette conclusion : chiffrage et littéralisation d'une Forme sont, dans le registre symbolique, deux procédés en sens inverse, de même que le sont, sur le plan des significations, leurs interprétations respectives : instantiation numérique et extension. Ce schéma d'un couple d'opposés, chiffrage et

56 Sous forme réduite néanmoins, le coefficient du terme du quatrième degré étant supposé nul. Il était alors bien connu que toute équation du cinquième degré pouvait être ramenée à cette situation.

57 Cf. HOFMANN J, op. cit, 146. Par exemple avec (Eta Un) et le degré cinq, on trouve :

$$x^5 - 5.c.\,x^3 + 15.c^2.X + 2.\,a = 0, \text{ où la valeur de c est représentée par } \sqrt[5]{a^2 - b}$$

La théorie de ces équations, a aujourd'hui perdu beaucoup de son intérêt.

58 On a fait agir la substitution au Chiffre 4,53, la substituante étant la Lettre a.

59 Nous dirons aujourd'hui, plus précisément, une fonction polynôme réelle à une indéterminée. On pourra ultérieurement regarder Gamma Un comme l'établissement d'une possible formule générale de résolution, induite à partir de l'examen d'un cas particulier numérique.

littéralisation, s'articule à l'évidence sur la division Lettre-Chiffre dans le magasin général des signes. De la même façon cependant, toute division entre les signes, quelle qu'elle soit, instituant entre ceux-ci deux catégories, emporte pareillement avec elle la possibilité d'une certaine métamorphose : la substitution universelle d'un signe fixé de la première catégorie, par un autre également fixé, mais de la seconde. Un exemple simple trouve sa source dans la division instaurée entre le Donné et le Requis par toute Clé d'interprétation. Décidons, comme par exemple chez Descartes, que les lettres minuscules du début de l'alphabet latin a, b, c, ... seront interprétées comme Donné indéterminé, cependant que les dernières vaudront pour le Requis inconnu. La Clé induit donc entre les lettres une division en deux catégories : les Alpha et les Zeta. Dès lors, nous définirons une Alpha-littéralisation comme la métamorphose par quoi, à toutes les occurrences d'un Zeta donné dans le contexte, par exemple x, viendra se susbtituer un Alpha également fixé, par exemple a : l'Alpha-littéralisation sera alors dite s'exercer de x vers a. Ainsi de la Forme

$$x^3 - a.\ x^2 + b.\ x - c$$

dont la transformée est

$$a^3 - a.\ a^2 + b.\ a - c$$ [60]

La transformation d'objet est ici une instantiation littérale de l'objet source (un polynôme de degré trois) : au lieu de x, la variable inconnue, est venu en effet le signe d'une grandeur connue, mais arbitraire : on reconnaît la dialectique de l'Indéterminé. De la même façon, nous définirons une Zeta-littéralisation, comme de a vers x dans :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3.\ a.\ b.\ c$$

pour donner

$$x^3 + b^3 + c^3 - 3.\ x.\ b.\ c$$

L'interprétation est ici un certain échange de significations entre Donné et Requis. Ce qui était en effet jusque-là considéré, sous la Lettre a, comme Donné indéterminé, c'est-à-dire arbitraire mais fixé, sera, dans la transformée, interprété, sous la Lettre x, comme Requis, et pourra donc, par exemple, faire l'objet

60 Une procédure qui est à l'origine de ce qu'on appelle les "formules de Newton", fournissant la somme des puissances k-ièmes des racines d'une équation algébrique de degré quelconque.

d'une procédure de recherche, dans le cadre d'une équation. Une perspective qui permet alors d'établir le canon [61] :

$$a^3 + b^3 + c^3 - 3. a. b. c = (a + b + c) [a^2 + b^2 + c^2 - (a.b + b.c + c.a)] \qquad 62$$

13.2.3.c Littéralisation des propositionnelles.

Nous reprendrons ici brièvement deux exemples chez Leibniz : le canon exponentiel et la différentielle d'une puissance, déjà évoqués, respectivement en 11.3 (*Substitution au lieu du Chiffre*) et 12.2 (*Le Nouveau Calcul de Leibniz).*

Dans le canon multiplicatif (Cf. 9.3.2.f), la propositionnelle source est *Phi* :

$$a^2. a^3 = a^{2+3}$$

usuelle chez Descartes. On effectue, sur chacune des deux Formes, amont et aval, deux littéralisations successives, d'abord au Chiffre 2, la substituante étant n, puis au Chiffre 3, la substituante étant p, pour produire *Phi Un* :

$$a^n. a^p = a^{n+p}$$

n et p étant interprétés comme entiers naturels indéterminés, l'objet de *Phi Un* renseignée est un canon, valable pour tous les couples d'entiers [63]. Ce type de métamorphose, où une Lettre vient ainsi partout remplacer un Chiffre dans une propositionnelle, sera encore dit littéralisation de celle-ci. Absente chez Descartes,

---

61 L'équation obtenue admet en effet la racine - b - c, de sorte qu'on a, par division euclidienne, la factorisation :
$x^3 + b^3 + c^3 - 3.x.b.c = (x + b + c) [x^2 + b^2 + c^2 - (x.b + b.c + c.x)]$

62 Tous les exemples de cette section ont utilisé une Lettre neuve pour substituante. Le cas au contraire où elle figurait déjà dans la Forme source redonne l'uniformisation, cette fois d'un autre type, comme autour de la Lettre x, dans la propositionnelle :

$$6. x.a^2 - 3.(x^2. a + a^3) + 2. x^3 = 1 \qquad (J)$$

pour obtenir la transformée :

298

$$6. x.x^2 - 3.(x^2. x + x^3) + x^3 = 1 \qquad (J. 1)$$

(J. 1) a alors même valeur que $x^3 = 1$.

63 La substance de son objet est donc toujours le Vrai.

Phi Un figure abondamment chez le second Leibniz [64], après qu'il eût rencontré, dans l'*Epistola Prior*, l'exponentielle newtonienne et son exposant littéral (cf. 14.1.1).

Dans le second exemple, nous détaillons dans le menu le mécanisme épistémologique qui conduisit Leibniz, dans la *Nova Methodus* de 1684 [65], au canon de la différentielle d'une puisssance. L'exposé demande d'abord un bref rappel historique. Dans les années 1673-1674 à Paris, au moment de la création du Calcul différentiel, Leibniz s'était trouvé grandement embarrassé par la différentielle d'un produit, une question dont, contrairement à la somme, l'interprétation géométrique, ne va pas de soi. Après bien des difficultés et errements [66], Leibniz parvint enfin à la propositionnelle *Sigma* :

$$d\,(x.\,y) = x.\,d(y) + y.\,d\,(x)$$

où sa Clé interprétait le Dée comme la différentiation, et x et y comme des "ordonnées". La même Clé assurait la véracité universelle de l'objet de *Sigma*, c'est-à-dire quelles que soient les interprétations de x et de y. *Sigma* représentait donc un canon.

Par une uniformisation naturelle autour de x, Leibniz obtenait alors une première *Sigma Un* :

$$d\,(x.\,x) = x.\,d(x) + x.\,d\,(x)$$

interprétée pareillement comme canon, auquel, par le jeu du calcul, Leibniz associa naturellement le canon équivalent, représenté par *Tau* :

$$d\,(x^2) = 2.x.\,dx$$

D'un autre côté, par divers essais et preuves géométriques, Leibniz se convainquit que :

$$d\,(x^3) = 3.\,x^2.\,dx \qquad (\textit{Upsilon})$$

et

$$d\,(x^4) = 4.\,x^3.\,dx \qquad (\textit{Oméga})$$

étaient deux canons également valides.

---

64 Par exemple dans *Conspectus Calculi*, M.S, VII, 85 (§18).

65 *Nova Methodus pro Maximis et Minimis, itemque Tangentibus, quae nec fractas nec irrationales quantitates moratur, et singulare pro illis calculi genus.* In *Acta Eruditorum*. Leipzig. 1684 = M. S, V, 220.

66 Cf.*supra*, 12.2 *Le Nouveau Calcul de Leibniz*, notes 16 et 17.

Les trois propositionnelles *Tau, Upsilon* et *Oméga* manifestent une forme d'analogie et d'intelligence combinatoire commune. Comment en rendre compte ? Au seizième siècle, et à supposer que la similitude ait pu être aperçue dans le corps opaque d'un texte rhétorique fournissant les résultats, elle n'aurait pu être cernée, également en termes rhétoriques, qu'au prix des difficultés, longueurs et ambiguïtés, que nous avons décrites en 5.4 à propos de l'équation commune. Descartes aussi en serait nécessairement resté là: quoiqu'il ait pourtant disposé d'un système symbolique déjà bien constitué, il considéra toujours en effet qu'au lieu de l'exposant, devait seulement venir un Chiffre pur. Au début de ses recherches en 1674-1675, le jeune Leibniz, tout imprégné de Descartes, fut lui aussi bien embarrassé par ces mêmes obstacles symboliques, qui ne lui permettaient qu'une mise en regard, séparée et stérile, d'un trio d'exemples, *Tau, Upsilon* et *Oméga*, pourtant structurellement analogues. Alors vint Newton. Et l'*Epistola Prior* de Juin 1676, apportait avec elle l'exponentielle newtonienne, c'est-à-dire la faculté de littéraliser à la place de l'exposant.

Dès lors, Leibniz fut en mesure d'entreprendre la représentation en termes symboliques, de l'analogie de structure entre *Tau, Upsilon* et *Oméga*. Cette représentation-extension demande une manipulation préalable, qui s'opère légitimement au nom du jeu du calcul, et que nous appellerons la *préparation* des propositionnelles. (elle "prépare le terrain" pour faire que se manifeste l'analogie). Le mécanisme peut en être ainsi décrit : dans *Upsilon*, on substitue au lieu du second 2, la substituante étant la Forme (3 -1) pour obtenir *Khi*:

$$d\,(x^{3}) = 3.\,x^{3-1}.\,dx$$

L'objet de *Khi* est ainsi un canon équi-valent [67] à celui de *Upsilon*. De même, dans *Oméga*, substitue-t-on au lieu du second 3, la substituante étant (4 -1) pour obtenir *Psi* :

$$d\,(x^{4}) = 4.\,x^{4-1}.\,dx$$

A leur tour, les objets de *Psi et* de *Oméga* sont deux canons équi-valents. La mise en regard de *Khi* et *Psi* suggère alors ceci : dans *Khi* par exemple [68], on littéralise partout au lieu du 3, la substituante étant a, pour obtenir *Pi* :

$$\boxed{d\,(x^{a}) = a.\,x^{a-1}.\,dx} \qquad (\textit{Pi})$$

67 Au regard des Clés concernées, et par le jeu du calcul.

68 L'une ou l'autre, de *Khi* ou de *Psi*, fait l'affaire.

qui sera la transmuée ultime, c'est-à-dire la transformée. En sens inverse en effet, et par deux chiffrages au lieu du a dans *Pi,* la substituante étant, selon le cas le Chiffre 3, ou 4, on obtient en retour, respectivement, les propositionnelles *Khi* ou *Psi* [69]. En un temps second, on devra naturellement s'assurer que *Pi* représente effectivement une égalité valable quelle que soit la valeur de l'entier de signe a, ce qui nécessite aujourd'hui une démonstration par récurrence. C'est cependant sans aucune démonstration, mais sous sa Forme définitive *Pi,* que le canon figure dans l'algorithme leibnizien [70] : en première analyse, on doit donc regarder le canon de la différentielle (objet de *Pi)* comme le prolongement des deux formules numériques (objets de *Upsilon* et *Oméga*).

Nous avons ici minutieusement analysé, en nos concepts de substitutions et métamorphoses, un mécanisme qui ne fut certes pas démonté de la sorte par son auteur, mais, dans les faits, intégralement employé par lui, et qui devint, dès lors, paradigmatique de la constitution et la production quasi systématique, dans le registre signifiant, de formules-extensions, au moyen de littéralisations de propositionnelles. L'apprentissage de ces procédures épistémologiques se fit ainsi sous forme inconsciente, et l'emploi des métamorphoses, en tous cas, ne fut jamais explicité. Observons de nouveau le rôle joué par ce que nous avons appelé le "jeu de calcul". Le partenaire combinatoire naturel de *Pi* est *Khi,* dont *Pi* est une littéralisation, et non *Upsilon.* De ce que *Upsilon* et *Khi* ont même substance, on a néanmoins décidé de conclure que l'objet de *Pi* était le prolongement de celui de *Upsilon.* C'est ainsi, par l'intervention d'un indispensable jeu du calcul, relevant du registre des significations, que Leibniz aura été en mesure de transposer le mécanisme, initialement purement combinatoire, de littéralisation d'une propositionnelle. La nature de cet exemple est ainsi distincte de ceux qui précèdent, où l'on s'était chaque fois limité à parcourir, dans les deux sens, le chemin entre les deux registres, combinatoire et signifiant. D'un côté donc, il y a ici la métamorphose ultime qui fait passer de *Upsilon* à *Pi,* de l'autre, son essentielle interprétation comme transformation d'objets, appelée plongement, ci-dessous, en

---

[69] On aurait aussi pu préparer *Upsilon* en

$$d\,(x^2) = 2.x^{2-1}.\,dx$$

et substituer

a

aux lieux des premier et troisième 2.

[70] M. S, V, 220.

13.2.5 [71]. Dans ces conditions, on dira aussi que Leibniz a *immergé* la formule de la différentielle d'un carré dans le canon de la différentielle d'une puissance.

Leibniz ne fournit aucune justification de la véracité du canon terminal. En un premier temps toutefois, il est clair d'après le contexte, que a est le signe d'un entier naturel indéterminé: en premier lieu donc, l'objet de *Pi* est une formule relative à la première exponentielle newtonienne (à exposant littéral), dans un cas particulier. Dans la foulée cependant, Leibniz propose aussitôt une extension de signification, par changement de Clé sur la même *Pi* : a sera désormais le signe d'un entier possiblement négatif : une procédure par extension des champs, déjà évoquée en 11.7 (*Exposants et extension de champs*), et qui sera analysée en 14.2.2. Leibniz propose alors sur ce point deux instantiations numériques, avec 3 et - 3 pour valeurs du nombre de signe a, pour obtenir, d'une part :

$d\ (x^{3}) = 3.\ x^{2}.\ dx$ (c'est-à-dire à nouveau *Upsilon*)

d'autre part :

$$d\left(\frac{1}{x^{3}}\right) = -3.\frac{dx}{x^{4}}$$

Une extension qu'il ne justifie pas davantage, mais s'applique à élargir encore - toujours sans justification - aux racines. Il expose d'abord en effet, sans utiliser de notations newtoniennes, ce résultat :

$$d(\sqrt[b]{x^{a}}) = \frac{a}{b}.\ \sqrt[b]{x^{a-b}}$$

Donc, dit-il : $d\ (\sqrt[2]{y}) = \dfrac{dy}{2\ .\sqrt[2]{y}}$, car dans ce cas a= 1 et b = 2

Cependant, allègue-t-il, cet exemple peut aussi s'écrire avec l'exponentielle newtonienne :

$$\frac{a}{b}.\ \sqrt[b]{x^{a-b}} \quad \text{vaut} \quad \frac{1}{2}.\ \sqrt[2]{y^{-1}}$$

Or $y^{-1} = \dfrac{1}{y}$ et $\sqrt[2]{\dfrac{1}{y}} = \dfrac{1}{\sqrt[2]{y}}$

71 Ou immersion. Le terme anglais *embedding*, usuel en mathématiques contemporaines, est ici pertinent.

Enfin , poursuit - il : $d\left(\frac{1}{\sqrt[b]{x^a}}\right) = -\frac{a\,.\,dx}{b\,.\,\sqrt[b]{x^{a+b}}}$

L'examen des derniers résultats montre qu'au bout du compte, pour Leibniz, le canon de la différentielle d'une exponentielle newtonienne, objet de *Pi,* demeurera valide par extension, en prenant pour signification de a un nombre, *entier ou rompu, de signe quelconque* [72].

Nous avons présenté notre étude à partir de la *Nova Methodus* de 1684, texte fondateur du Nouveau Calcul. Tous ces résultats se trouvaient cependant -avec d'autres encore, dont ce qu'on appelle aujourd'hui la différentielle de composées d'applications- dans la lettre à Oldenbourg du 21 Juin 1677 [73]. La réception par Leibniz de l'exponentielle newtonienne ne datait cependant que de Juin 1676. Dès 1677 donc, Leibniz avait tiré les enseignements combinatoires des deux *Epistolae* [74].

Par le jeu de l'abstraction "littérale" de propositions numériquement spécifiées, Leibniz aura ainsi constitué, dans ses deux exemples, non plus des objets-extensions comme dans les Formes, mais des mise en relation-extensions. Cette mise en relation (ici l'égalité), se trouvant avoir eu chaque fois valeur universelle, les extensions produites s'analyseront donc en des canons. Ainsi, au regard des Clés usuelles, la littéralisation d'une Forme, ou d'une propositionnelle, renseignée, s'interprétera comme une extension d'objet. Dans les cas où l'objet source est une formule, comme la règle additive, ou bien l'Algorithme leibnizien, cette extension sera ainsi une mise sous forme canonique, ou *canonisation*, de la formule.

13.2.4 La dialectique extension - instantiation. Métamorphoses et méthodologie de l'invention.

Dans cette section, on examine comment la pratique systématique de métamorphoses offre au mathématicien, par extension d'objets et de problèmes existants résolus, non pas des idées de preuves nouvelles, mais des objets mathématiques neufs à créer, et, corollairement, des problèmes nouveaux, possiblement

72 On considère aujourd'hui ce canon comme valide au regard d'une Clé encore élargie : a est ainsi le signe d'un nombre quelconque, et x celui d'un nombre positif quelconque.

73 *Bw*, op. cit, en particulier, 241 - 242.

74 Au moment de la querelle entre Leibniz et Newton, certaines des pièces importantes du procès furent spécifiquement dénommées. Ainsi distingue-t-on classiquement l'*Epistola Prior* de Juin 1676 (op. cit), adressée par Newton à Leibniz par l'intermédiaire d'Oldenbourg et l'*Epistola Posterior* , toujours de Newton à Oldenbourg, du 24 Octobre 1676. in *Bw*, op. cit., 203 - 225.

"intéressants" à poser, et le cas échéant, à résoudre. Cette systématicité résultera ici de l'essai, sur une propositionnelle donnée, de toutes les littéralisations possibles, à tous les lieux occupés par un Chiffre. Et ce en demeurant, au moins initialement, dans le seul registre combinatoire, en dehors donc de toute considération primitive de signification, en particulier sans avoir égard à une quelconque *salva veritate*. Une méthodologie que nous appellerons aveugle, en nouvel hommage à Leibniz, en même temps qu'une forme de contribution véritablement très spécifique à l'avancement des mathématiques et à leur *Ars Inveniendi*. Constamment utilisée aujourd'hui dans la recherche, elle n'aura cependant, à notre connaissance, jamais été mise en évidence, à la très notable exception de Leibniz, qui la glorifia sous le nom d'Art Combinatoire. Doté d'une imagination prodigieuse en matière de métamorphoses, il en produisit un éventail de réalisations variées, parfois insolites, certaines ayant été présentées plus haut. Cette question est reprise en 13.3 ci-dessous.

Notre exemple traitera d'équations algébriques et de recherche de racines multiples. Il insère la source Béta ci-dessus (13.1), dans la propositionnelle *Béta* :

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - 1 = 0$$

symbolisant une équation de degré deux [75], dont on constate facilement qu'elle admet une racine double [76]. On reprend alors, une à une, les diverses substitutions de la section 13.1.2, appliquées à *Béta*. La première conduit à *Béta Un* :

$$4.(x+1)^n - 4.x^n - 1 = 0 \qquad {}^{77}$$

La Lettre n représentant un entier naturel, supérieur ou égal à 2, l'équation transformée, de degré n -1, est aussi une "canonisée" de l'équation initiale. L'entier de signe n étant cependant fixé mais arbitraire, conformément à la dialectique de l'indéterminé, *Béta Un* représente aussi une classe d'équations (Cf. 7.9), une nouvelle espèce donc [78], naturellement considérée comme extension [79] de l'équation source. Ainsi a-t-on à la fois créé un nouvel objet, et procédé, quant à l'équation et au problème initiaux, à une

---

75 Il y a en effet, lorsqu'on développe le premier membre par le calcul, réduction de certains termes. Le concept de degré d'une équation est donc signifiant, et non combinatoire.

76 De valeur $-\frac{1}{2}$. En termes modernes, on dira qu'est vraie la proposition quantifiée :

304 $(\exists\, x \in C)\,(P(x) = 0 \wedge P'(x) = 0)$ (P représente l'objet de *Béta*)

77 Littéralisation au Chiffre 3, la substituante étant n.

78 Dite équation indéterminée.

79 Dite fréquemment aussi "généralisation " dans la littérature mathématique contemporaine.

extension si considérable, qu'on pourrait, à la manière de Cantor, lui reconnaître la "puissance de l'Indéterminé". En retour, l'équation initiale apparaît comme résultant du choix d'un individu spécifié dans une espèce, simple instantiation numérique dans la classe des équations créée, la valeur de l'entier de signe n étant supposée égale à 3. Ainsi s'organise, du simple fait de la littéralisation, cette dialectique de l'extension-instantiation (numérique), aujourd'hui si commune dans le registre des significations. Le choix de la littéralisation cependant, n'aura primitivement été qu'une pure affaire combinatoire et n'aura présenté, au regard des interprétations ultérieures, aucun caractère de nécessité initiale : il a seulement ici été question de tirer un parti littéral du simple repérage visuel d'un invariant : le même Chiffre 3, deux fois en exposant.

Dans notre exemple, la question des racines multiples devient alors celle-ci : peut on choisir l'entier indéterminé de signe n, pour que la transformée admette une racine multiple ? Un bref calcul montre que, hors le cas originaire où la valeur de l'entier de signe n est 3, la réponse est négative [80].

D'un autre côté, on transforme la même source *Béta* pour obtenir *Béta Deux* :

$$4.(x+1)^3 - 4.x^3 - a = 0 \qquad {}^{81}$$

Cette métamorphose ne répond pas davantage à des considérations impératives de signification, mais à nouveau au simple fait de "jouer" sur un des Chiffres présents, non encore utilisé comme support (le 1). L'interprétation usuelle de *Béta Deux* est, à nouveau, une équation du second degré, dépendant cette fois d'un paramètre, de signe a. Dans une perspective autre que la précédente, cette équation est donc, elle aussi, une extension de l'équation source, qui en est pareillement, en retour, une instantiation numérique, la valeur de a étant 1. La question des racines multiples de la transformée est alors analogue : est-il possible de déterminer le nombre indéterminé de signe a pour que l'équation admette une racine multiple ? Hors le cas originaire où la valeur de a est 1, la réponse est encore ici négative [82].

---

80 En termes modernes, on dira que la proposition quantifiée :

$$(\exists\, n \in N_3)\ (\exists\, x \in C)\ (Q_n(x) = 0 \wedge Q'_n(x) = 0)$$

n'est vraie que si la valeur du nombre de signe n est égale à 3

(Q_n est l'objet de *Béta Un*). N_3 est l'ensemble des nombres naturels supérieurs ou égaux à trois.

81 On a ainsi opéré une autre littéralisation, cette fois au lieu du 1, la substituante étant a.

82 En termes modernes, on dira que la proposition quantifiée :

$$(\exists\, a \in C)\ (\exists\, x \in C)\ (P_a(x) = 0 \wedge P'_a(x) = 0)$$

n'est vraie que si la valeur du nombre de signe a est 1

(P_a est l'objet de *Béta Deux*).

Placé devant deux littéralisations conduisant à des échecs quant aux racines multiples, le géomètre pourra alors essayer une troisième voie, combinatoirement naturelle : la succession des deux métamorphoses précédentes et ainsi obtenir :

$$\boxed{4 . (x+1)^n - 4 . x^n - a = 0 \qquad (\textit{DiBeta})}$$

encore interprétée comme équation de degré n-1, et qui constitue donc, dans deux perspectives distinctes et simultanées, une généralisation de l'objet de *Béta*. *DiBéta* contient trois Lettres : x, a, et n. On décidera à ce moment d'utiliser la Clé suivante : n étant toujours interprété comme donné, a sera désormais le signe d'un requis [83]. La question des racines multiples est alors : peut-on déterminer le nombre de signe a pour que, l'entier de signe n étant considéré comme donné, l'équation admette une racine multiple [84] ? Et la question admet cette fois des solutions non triviales, c'est-à-

83 La Clé usuelle aurait conduit à considérer a et n comme signes de donné, et x comme signe de requis : on "résout en x, fonction de a et b ", ce qui s'écrit en termes modernes :

$$(\forall\, n \in \mathrm{IN}_3)\ (\forall\, a \in C)\ (\exists\, x \in C)\ (R_{a,n}(x) = 0 \wedge R'_{a,n}(x) = 0)$$

($R_{a,n}$ est l'objet de *DiBéta*).

84 La situation est ici devenue un peu plus complexe qu'avec la Clé usuelle (Cf. note *supra*). En termes modernes, la question posée est en effet celle de la véracité de la proposition quantifiée :

$$(\forall\, n \in \mathrm{IN}_3)\ (\exists\, a \in C)\ (\exists\, x \in C)\ (R_{a,n}(x) = 0 \wedge R'_{a,n}(x) = 0)$$

Sur cet exemple, avec cette nouvelle Clé, s'introduit alors naturellement le concept de relativité du caractère Donné-Requis : l'interprétation de a est ici celle d'un requis, relativement à l'interprétation de n, et d'un donné, relativement à celle de x. Il n'est donc pas toujours de donné ou de requis en soi, même dans un contexte déterminé. D'une part, ces conclusions ne sont évidemment pertinentes que dans le cas d'une propositionnelle, et non d'une forme symbolique. D'autre part et en même temps, elles prolongent, en, les affinant, celles que nous avions données en 7.6 à propos des Clés après Viète. Rarement observée au début du XVII^{e} siècle, cette situation de relativité devint en fait très usuelle avec le temps : en conséquence, toute Clé d'interprétation, pour être véritablement achevée, devra exhaustivement décrire les rapports de relativité existants, à l'intérieur d'une propositionnelle, entre les interprétations des diverses Lettres dans le registre Donné-Requis. Nous n'étudierons pas ici cette description nécessaire, qui se fit, à partir du milieu du XIX^{e} siècle seulement, d'abord par Bentham et de Morgan, enfin par Frege, par le moyen de la quantification du prédicat. Les textes des notes ci-dessus en montrent cependant le résultat : l'écriture moderne a pris en charge les Clés d'interprétation ainsi achevées en les faisant figurer comme préfixes à chaque propositionnelle ; l'ordre de succession dans la Ligne des quantificateurs et leur nature, comme dans :

$$(\forall\, n \in \mathrm{IN}_3)\ (\exists\, a \in C)\ (\exists\, x \in C)\ (R_{a,n}(x) = 0 \wedge R'_{a,n}(x) = 0)$$

fixe ainsi les rapports de relativité : de l'interprétation de a comme requis, relativement à celle de a, et donné, relativement à celle de x par exemple. Les préfixes sont ainsi rédigés dans le cadre d'une certaine autre écriture symbolique, avec une syntaxe combinatoire neuve, celle des quantificateurs. Il y a donc création d'un autre registre symbolique, que nous n'étudierons pas ici.

dire hors les cas originaires. Pour valeurs de a, on trouve en effet le canon [85] :

$$a = \frac{(-1)^{k+n-1}\, i^{\,n-1}}{\left(2 \sin \frac{k\pi}{n-1}\right)^{n-1}} \qquad \text{pour} \quad k \in \{1, 2, \ldots, n-2\}$$

Sans intérêt autre que pédagogique, mais aussi représentatif d'un grand nombre d'autres dans la pratique mathématique quotidienne, et en même temps extrêmement simple, cet exemple est en vérité paradigmatique: la source *Béta* étant ici presque entièrement chiffrée, l'équation source était donc déterminée, c'est-à-dire sans aucun paramètre ; d'un autre côté, la question des racines multiples y trouvait une réponse triviale unique. De son côté, la transmuée finale aura été doublement littéralisée ; en conséquence, la classe d'équations qu'elle représente contiendra deux paramètres, de signes a et n. Encore une fois, on observera ici la dialectique naturelle de l'extension-instantiation déjà notée : l'équation source est (à un double titre) une instantiation numérique de la transformée finale, cependant que celle-ci est en retour une (double) extension de celle-là. Dans un cadre ainsi doublement élargi, la question des racines multiples trouve alors une réponse non triviale et satisfaisante, ce qu'on n'avait pas observé dans les tentatives intermédiaires. La réussite obtenue dans la transformée ultime se subsume en la création d'un problème neuf, intéressant, et qui ne résultait nullement ni de l'examen initial, ni d'une interprétation naturelle de la source. Ce succès s'est d'autre part accompli dans notre troisième essai : or celui-ci n'était constitué que de l'exécution successive des deux autres, autrement dit, de deux littéralisations infructueuses. C'est donc la répétition d'une procédure de littéralisation qui a permis la réussite. A nouveau cependant, cette répétition n'a répondu à aucune nécessité initiale de signification, mais seulement, dans le registre combinatoire, à l'observance de cette forme de méta-principe: la répétition, lorqu'elle est possible, est une opération combinatoirement recommandable.

La dialectique extension-instantiation, ainsi élaborée à propos des deux équations, source et transformée, se transpose ensuite de plein droit aux solutions du problème : ainsi, les solutions de l'équation-instantiation sont obtenues, à partir du canon ci-dessus fourni pour l'équation-extension, comme instantiations respectives de ce même canon [86]. La comparaison finale entre la

85 Ce calcul est valide si x est interprété comme un nombre complexe : il existe alors des solutions pour toute valeur de n. Sur le corps des nombres réels, il n'y a de solutions que si n représente un entier impair.

86 On vérifie que pour le nombre de signe n égal à 3, seule convient l'égalité à 1 du nombre de signe k, et donc, seule celle de a à 1. La restriction (au sens moderne) à l'équation source de la résolution du

source *Béta* et la transformée *DiBéta* montre alors comment la réussite est en fait venue couronner un certain nombre d'essais, au hasard, portant substitution à presque tous les lieux possibles occupés par des Chiffres dans *Béta*. Un exemple qui illustre donc l'intérêt de la pratique aveugle des métamorphoses, à l'effet de créer des problèmes neufs à résoudre.

13.2.5 Plongements.

On peut prolonger autrement l'exemple *DiBéta*, en y opérant encore une littéralisation neuve, et faisant cette fois en sorte que, en dehors de toute question de signification quant aux racines doubles, son objet puisse être à son tour considéré, en un certain sens, comme une instantiation seulement d'une classe d'équations plus large encore. Envisageons à cet effet la métamorphose de *DiBéta* conduisant à *Oméga* ci-dessous :

$$\boxed{(4+b+b^2).(x+1)^n-(4-b+b^2).x^n-a=0}$$

A partir d'un simple examen synoptique de *DiBéta*, on a ainsi simplement substitué les Formes $(4 + b + b^2)$ au lieu du premier 4, et $(4 - b + b^2)$ au lieu du second. Si dans *Oméga*, on effectue en sens inverse le Chiffrage au lieu du b, la substituante étant 0, on obtient *omicron* :

$$(4+0+0^2).(x+1)^n-(4-0+0^2).x^n-a=0$$

Le Chiffre 0 étant interprété comme zéro, les Formes $(4 + 0 + 0^2)$ et (4) ont même valeur : *DiBéta* et *omicron* ont ainsi même substance. On reconnaît ici cette particulière dialectique de l'extension-instantiation, que nous avons déjà appelée plongement ou immersion : ici, de l'objet de *DiBéta* (une équation), dans celui de *Oméga* (une classe d'équations). Contrairement aux exemples initiaux de ce chapitre, où la conclusion provenait directement du seul registre combinatoire, le plongement a emprunté au registre des significations l'indispensable égalité des substances, ou équivalence, entre *DiBéta* et *omicron* : ce n'est pas en effet par une littéralisation de (4), au sens purement combinatoire précédent, qu'on obtient la

problème des racines mutiples est donc bien l'instantiation numérique, selon la formule plus haut donnée, de sa résolution dans la transformée.

Forme $(4 + b + b^2)$, mais bien par un plongement, qui fait intervenir une certaine interprétation des Lettres, la procédure étant la même que celle de l'algorithme leibnizien (1.13.2.3.b *supra*) : d'une façon complètement nécessaire donc, le plongement, qui s'effectue pourtant sur des objets, dans le registre des significations, articule néanmoins nécessairement les deux registres, combinatoire et signifiant.

Se trouve en même temps mis à jour le processus de création par lequel les jeux des métamorphoses dans l'écriture symbolique permettent de reconsidérer après-coup un certain objet -ici l'équation, objet de *DiBéta* -, apparemment donné en soi, comme une simple instance, un cas particulier, d'une classe qui, le recouvre, et dans laquelle il est plongé (ici, l'objet de *Oméga)*. D'une part, cette création est éminement contingente : d'autres plongements, différents, visant l'objet de *DiBéta* auraient ici été tout à fait possibles. D'un autre côté, la création initiale de *Oméga* s'est faite à partir du simple examen visuel de *DiBéta*.

On saisit donc ici, *in statu nascendi*, ce procédé majeur de création, en mathématiques, d'une espèce à partir d'un individu. Ce qu'on observe pareillement, dans cet exemple bien connu en Physique, qui immerge la mécanique classique dans la relativiste, avec comme source *Kappa* :

$$x = v.t$$

et *Kappa Un* :

$$x = \frac{v}{\sqrt{1 - c^2}} . t$$

pour transmuée [87].

13.2.6 Echange et symétries.

Effectuons sur la source *Lambda* :

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a.b + b.c + c.a)$$

cette métamorphose constituée de deux littéralisations simultanées : à chaque lieu occupé par un a, on

87 Combinatoirement, on a substitué au lieu du v, la substituante étant $\frac{v}{\sqrt{1 - c^2}}$
Sur le plan des significations, la formule source est une instantiation de la transformée, la valeur du nombre de signe c étant zéro.

substitue la Lettre b, et, en même temps, à chaque lieu occupé par un b, on substitue a. La transformée *Lambda Un* est ainsi:

$$b^2 + a^2 + c^2 - (b.\, a + a.\, c + c.\, b)$$

On dit qu'on a effectué l'échange de a et b dans la source. Si *Lambda* et *Lambda Un* sont effectivement combinatoirement distinctes, les substances de leurs objets coïncident néanmoins au regard des Clés usuelles. Ainsi dira-t-on ordinairement que *Lambda* est "symétrique par rapport à a et b." Comme on constate facilement que la même faculté demeure, relativement à b et c, on dira, usuellement aussi, que *Lambda* est "symétrique par rapport à a, b, c ", l'image intuitive étant ici celle d'une certaine indifférence de la Forme relativement au jeu des distinctions naturelles entre les Lettres constituantes (a, b, c). L'expression "Forme symétrique" est cependant incorrecte : l'égalité des deux valeurs, dans *Lambda* et *Lambda Un*, est par exemple assurée si les lettres sont interprétées comme des nombres, et fausse si elles le sont comme matrices carrées [88]. La symétrie observée est donc affaire d'interprétation, et repose sur les significations apportées aux Lettres et assembleurs. Ainsi, la propriété de symétrie, qui doit être rapportée à l'objet et non à la Forme, relève-t-elle du registre des significations, et non du combinatoire.

Tout échange est ainsi déterminé par la donnée de deux Lettres figurant dans un contexte et s'analyse en la métamorphose composée de deux substitutions à la Lettre simultanées [89] telles que, à tout lieu occupé dans la source par la première Lettre vient se substituer la seconde, et qu'en même temps, à tout lieu occupé par la seconde, vient se substituer la première. Les

---

88 Le Point et la Croix étant toujours interprétés comme produit et somme, de nombres ou de matrices, selon le cas.

89 L'exigence de simultanéité pose cependant quelques problèmes au regard de la définition d'une métamorphose (cf. *supra*), qui n'autorise pas, en effet, l'exécution de plusieurs substitutions en même temps, puisqu'elle en requiert au contraire la succession. Notre construction de l'échange doit alors être légèrement modifiée. On opère d'abord la littéralisation aux lieux du a, la substituante étant b, pour obtenir :

$$b^2 + b^2 + c^2 - (b.b + b.c + c.b)$$

Cette Forme contient alors six occurrences de la Lettre b. On opère alors trois substitutions aux lieux des deuxième, quatrième et cinquième b, la substituante étant toujours a. Une description qui est donc plus complexe et moins naturelle. Au sens strict cependant, cet échange n'est donc pas constitué de l'exécution de deux littéralisations, mais d'une littéralisation, suivie de diverses substitutions simples. Une difficulté générale que perçoit et résout Leibniz (Cf. *Opuscules*, op.cit, 255), qui distingue entre deux modalités d'une substitution universelle : "Aliud est *Ubivis*, aliud *Ubique*. " Cf. sur ce point le commentaire de Couturat in *La logique de Leibniz*, op. cit, 338.

métamorphoses organisées avec des échanges peuvent déboucher sur des modifications structurelles importantes. Nous prendrons comme exemple *Digamma* :

$$1.x^2 - 5.\,x + 6$$

avec *Digamma Un* pour transformée :

$$6\,.\,(y - \frac{1}{y})^2 - 5\,.\,(y - \frac{1}{y}) + 1$$

On a clairement utilisé ici quatre substitutions successives [90], avec un jeu double : échange du 1 et du 6 d'une part ; changement de variables d'autre part, puisqu'on a aussi posé :

$$x = y - \frac{1}{y}$$

L'équation transformée, où l'inconnue a pour signe y, voit alors ses racines simplement liées à celle de l'équation source [91]. En suivant celles-ci "à la trace", elles sont donc aisément trouvées :

$$\frac{1+\sqrt{17}}{4},\ \frac{1-\sqrt{17}}{4},\ \frac{1+\sqrt{37}}{6},\ \frac{1-\sqrt{37}}{6}$$

13.2.7 Substitutions à la place.

Nous conclurons provisoirement en observant le carcatère insuffisant de notre définition première des substitutions, même au regard de la pratique des seuls XVII^e^ et XVIII^e^ siècles. Pour faire court, nous avions en effet partout supposé que toute substitution s'exerçait au lieu d'une Lettre-Chiffre. Une situation qui était certes en vigueur au début du XVII^e^ siècle, mais qu'avec le temps, les mathématiciens vinrent à modifier, opérant spontanément les substitutions au lieu d'un assembleur, ou bien à la place d'une Forme. Si, par exemple, dans la source Mu :

---

90 D'abord à chaque lieu du x , la substituante étant $(y - \frac{1}{y})$
C'est donc une substitution à la Lettre. Ensuite, l'échange du 1 et du 6.

91 L'équation source admet pour racines 2 et 3. Une première transformée :
$6.\,x^2 - 5.\,x + 1$ (dite équation réciproque) admet pour racines les inverses des précédents, soit 1 / 2 et 1 / 3. La métamorphosée admet pour racines les nombres de signe y tels que $y - \frac{1}{y} = \frac{1}{2}$ ou $y - \frac{1}{y} = \frac{1}{3}$. On trouve les quatre solutions annoncées.

$$a + b + x.\, y$$

dûment complétée en

$$(a + (b + (x.\, y)))$$

on effectue l'échange des assembleurs, Point et Croix, on obtient la transformée Mu Un :

$$(a.\, (b.\, (x + y)))$$

Observons d'abord l'absolue nécessité, dans la réalisation de cet échange, du rétablissement préalable des signes de délimitation. D'un autre côté, le rôle signifiant des deux opérations a été purement et simplement transféré de l'une à l'autre. La transformée est ici dite *duale* de la source, par le jeu de la dualité entre la Croix et le Point. Si les Lettres sont ici interprétées comme nombres, et les assembleurs comme somme et produit de nombres, les deux objets, source et transformé, présentent des substances et des procédures qui sont ici sans rapport simplement interprétable entre elles [92]. Son usage est par contre aujourd'hui indispensable et quotidien en théorie des treillis, où Croix et Point sont respectivement interprétés comme *sup* et *inf* : dans un treillis, les canons vont ainsi par paires duales [93]. De ce même type de substitutions portant sur des assembleurs porte témoignage un exemple effectif, historiquement important : la "formule de Leibniz" relative à la différentielle n-ième d'un produit de deux fonctions, en un schéma que nous analysons en détail au 15.2 dans nos conclusions (*Art combinatoire et sélection naturelle.*)

Pour un autre type d'exemples, retournons à l'équation du troisième degré :

$$x^3 + p\,x = q$$

où la formule de Cardan donne "la" solution :

---

92 Avec cette Clé, la métamorphose peut ainsi être considérée comme dépourvue de signification intéressante.

93 Ainsi, dans un treillis où $\vee$ est interprété comme *sup*, et $\wedge$ comme *inf*, les deux propriétés duales ci-dessous, universellement quantifiées :

$$z \vee (x \wedge y) = (z \vee x) \wedge (z \vee y)$$

et

$$z \wedge (x \vee y) = (z \wedge x) \vee (z \wedge y)$$

312

sont-elles logiquement équivalentes. Un treillis dans lequel l'une ou (et) l'autre est vérifiée est dit distributif. Toute algèbre de Boole, tout treillis Brouwerien est ainsi distributif. Cf. sur la théorie des treillis, l'ouvrage fondateur de BIRKHOFF G. *Lattice Theory*. American Mathematical Society Colloquium Publications. Providence. 3° Ed. 1967.

$$\sqrt[3]{\frac{q}{2} + \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}} + \sqrt[3]{\frac{q}{2} - \sqrt{\left(\frac{q}{2}\right)^2 + \left(\frac{p}{3}\right)^3}}$$

Sur cette Forme d'apparence complexe, on exécute une double littéralisation : à la place de la Forme $\frac{q}{2}$ d'une part (la substituante étant a), et à la place du $\frac{p}{3}$ d'autre part, (la substituante étant b). On obtient :

$$\sqrt[3]{a + \sqrt{a^2 + b^3}} + \sqrt[3]{a - \sqrt{a^2 + b^3}}$$

Ainsi, dans chaque cas, le support de la Littéralisation est-elle ici une Forme (de niveau un) et non une Letttre-Chiffre, comme nous l'avions primitivement supposé. Par cette condensation de la structure, il se dégage cependant de la transformée une morphologie répétitive, particulière et bien visible, qui excita grandement l'intérêt des algébristes du XVII^{e} siècle et que nous avons analysée en 13.2.3 [94].

Un autre exemple est celui de la source Ksi :

$$\frac{1}{2 . i . \lambda}\left[(x + i \lambda)^{n+1} - (x - i \lambda)^{n+1} \right]$$

avec pour transformée Ksi Un :

$$\frac{1}{c} . \left[a^{n+1} - b^{n+1} \right]$$

sur laquelle, par la disparition des singularités contingentes, la structure est à nouveau bien mise en apparence [95].

94 Cf. aussi notre analyse historique sur ce point (en particulier pour les cas irréductible), in SERFATI, *Le secret...*, op. cit., 19-20.

95 La source se rencontre dans l'étude des polynômes récurrents vérifiant :

$P_n(x) - 2\,x\,P_{n-1}(x) + (x^2 + \lambda^2)\,P_{n-2}(x) = 0$ pour $n \geq 3$.

avec $P_1(x) = 2\,x$; $P_2(x) = 4x^3 - 4\,\lambda^2\,x$.

La substance de l'objet de Ksi est la valeur de Pn (x). L'interprétation de la transformée met en évidence le fait, que pour chaque x fixé, la relation de récurrence est linéaire à coefficients constants.

13.3. L'Art Combinatoire.

Organiser des substitutions et métamorphoses, telles qu'ici décrites, avait été une opération bien évidemment impossible dans le cadre de l'écriture rhétorique -ou même seulement syncopée- des mathématiques. Etaient par exemple inconcevables toutes les littéralisations, aujourd'hui si répandues, elles qui instaurent dans le registre signifiant la dialectique devenue quotidienne entre extension et instantiation [96]. Co-extensives au registre combinatoire tel qu'il se développa et se répandit après Viète et Descartes, littéralisations, substitutions, ou métamorphoses ne pouvaient, en fait, seulement être imaginées depuis l'intérieur de l'écriture rhétorique ou du système cossique. Inconcevable donc avant Descartes, la pratique des métamorphoses devenait en principe, possible après lui. De ses successeurs cependant, Leibniz fut, quarante ans plus tard, le premier à en pratiquer un usage à la fois constant et en même temps "aveugle", qu'il s'attacha à glorifier sous le nom d'Art Combinatoire, aussi appelé Charactéristique [97]. L 'Art Combinatoire de Leibniz, qui coïncide aussi avec que nous avons ici appelé la méthodologie des "métamorphoses à l'aveugle" possédait, dans les catégories leibniziennes, un rang hiérarchique très élevé, puisque l'algèbre elle-même lui était subordonnée, comme on peut lire dans la lettre à Oldenbourg du 28 Décembre 1675 [98] :

> "Haec Algebra, quam tanti facimus merito, generalis llius artificii non nisi pars est... Ego vero agnosco, quicquid in genere probet Algebra, non nisi superioris scientiae beneficium esse, quam nunc Combinatoriam Characteristicam appellare soleo..."

Et Couturat de s'interroger : "Qu'est-ce donc, en définitive, que cette Combinatoire à laquelle Leibniz subordonne si complètement l'Algèbre? C'est la science générale des formes et des formules." [99] Et en vérité Leibniz ne cessa de mettre en avant les privilèges de l'Art Combinatoire, souvent identifié à la Charactéristique Génerale, elle-même parfois confondue avec la

---

96 On songe aux équations généralisées de Cardan que créa Leibniz, à partir du seul examen visuel de la Forme symbolique des solutions, au moyen d'une littéralisation, et en dehors de tout requisit de signification (Cf. *supra).* Ces équations généralisées "de Cardan" n'auraient certes pu être conçues par Cardan lui-même, lui qui dans son *Ars Magna* de 1545, avait fourni, pour ses équations, une comptine en guise de solution.

97 Leibniz déclara fréquemment vouloir confondre les deux concepts. Cf. par exemple *Nova Algebrae promotio* : "Speciosa autem generalis ipsa est Ars characteristica, in unam cum Combinatoria disciplinam confusa, per quam rerum relationes apte characteribus repraesentantur." (M.S, VII, 159.)

314

98 *Bw*, op.cit, 145.Ce que Leibniz explique longuement aussi à Tschirnaus, dans une lettre de Mai 1678, (MS, IV, 453).

99 *Logique*, op. cit, 288.

Spécieuse. Nous ne détaillerons pas ici ces diverses inflexions de sens, au demeurant pleines d'intérêt, et renvoyons sur ce point à Couturat [100]. S'il la glorifia continûment, Leibniz n'en décrivit cependant jamais le fonctionnement, suscitant ainsi incompréhension et ironie de ses contemporains, en particulier de Tschirnaus. Notons enfin ceci, rapporté par Couturat : "Lorsque [Leibniz] projetait de construire des Tables algébriques pour la résolution des équations, il disait que ce travail relevait de l'Art Combinatoire." [101]

Ainsi l'Art Combinatoire représenta-t-il, pour Leibniz, une méta-discipline, dont, dans l'histoire des mathématiques jusqu'à aujourd'hui, il fut, à notre sens, le seul servant à reconnaître publiquement la très considérable importance. Si depuis Leibniz en effet, la pratique de la littéralisation par exemple, n'a cessé de se développer et, dans les faits, d'occuper le terrain, particulièrement celui de la création, elle n'aura cependant pas fait, à notre connaissance, l'objet de la moindre tentative de thématisation.

Ce chapitre a donc analysé divers exemples historiques, soulignant chaque fois l'intérêt, considérable pour l'avancée des mathématiques, des métamorphoses, bien souvent effectuées "à l'aveugle". C'est-à-dire : non pas délibérément, au regard d'exigences supposées provenant du registre des significations, mais souvent sur un mode inconscient, le géomètre étant guidé à la fois par le regard et par son expérience intériorisée : d'une part, l'examen visuel de la structure combinatoire d'une Forme source, d'autre part les habitudes qu'il aura prises en matière de littéralisations par exemple, et leurs mises à l'épreuve subséquentes, *i.e* leurs éventuelles réussites dans le registre des significations. C'est toutefois l'examen synoptique primordial de la Forme qui aura chaque fois été décisif. De plus en plus donc, dans la recherche et l'invention, les géomètres opérèrent, à propos de Formes pour supports, des essais automatiques de métamorphoses, sans même que le détail en soit chaque fois explicité par l'auteur, contrairement à ce que nous avons fait ci-dessus, en spécifiant par exemple le choix du support, de la substituante, etc...

Ainsi comprise cependant, cette méthodologie "à l'aveugle" prive momentanément de toute pertinence le registre des significations, lui qui ne retrouvera qu'après-coup son importance et sa place. Et le texte symbolique de se trouver présenter à ce moment un caractère d'autonomie complète, situation dont l'assomption

100 *La Mathématique Universelle*, in *Logique*, op. cit, Chapitre VII, 283-322.
101 idem *Logique*, op. cit, 286.

pourra d'ailleurs être considérée par son créateur comme un gage local de fécondité dans l'invention. Cependant, de cette autonomie momentanée gagnée par le symbolique, de l'importance véritable ainsi restituée aux substitutions et métamorphoses, de leur caractère central dans l'élaboration d'une partie de la pensée mathématique, résulte à nouveau cette incontestable conséquence : le caractère désormais intenable de la conception première selon laquelle l'écriture symbolique avait pour seule vocation la traduction des significations apportées par l'auteur, qu'elle ne devait donc être, restreinte à son registre combinatoire, que la modeste servante du sens.

Nous terminerons en soulignant combien, sur ce point des substitutions, notre conception et nos centres d'intérêt furent parfois bien différents de ceux de Frege dans la *Begriffsschrift* [102]. Un des objectifs de Frege fut par exemple la *définition* et la *reconnaissance* d'une fonction, essentiellement par des procédés formels (la reconnaissance de plusieurs occurrences d'un même signe) mais aussi par des observations empiriques (si l'on *pense* que le signe peut être remplacé). Nous avons au contraire essayé de montrer, avant toute définition abstraite d'une fonction -anachronique au XVII^e^ siècle- comment les littéralisations aveugles, à la façon de Leibniz, ont été sources d'invention, une problématique qui n'est guère évoquée par Frege. Dans notre étude, nous avons aussi souligné que ce que nous avons appelé métamorphose n'était pas toujours constitué par le seul cas examiné par Frege et qu'il appelle substitution, c'est-à-dire le remplacement d'un même signe par une même Forme.

102 Ainsi de la *Begriffsschrift* au § 9 : "Nous exprimons la chose de manière générale en disant : Si dans une expression dont il n'est pas nécessaire que le contenu soit celui d'un jugement, un signe simple ou composé a une ou plusieurs occurrences, et si l'on pense que ce signe, en toutes ou en quelques unes de ses occurrences, peut être remplacé par un autre, pourvu que le signe substitué soit toujours le même, alors la partie stable de l'expression est appelée fonction et la partie soumise à substitution est appelée argument de la fonction." Traduction de Claude IMBERT, in *Ecrits logiques...*,op. cit, 25.

Deuxième partie :
Symbolique et invention.

Chapitre 14

Formes sans significations.

14. Formes sans significations.

Le présent chapitre est consacré à diverses Formes sans signification et à la façon dont les géomètres qui les rencontrèrent, ou les constituèrent, s'efforcèrent de leur fournir une substance. Nous tâcherons de montrer comment ces questions, inconcevables dans l'écriture rhétorique, ne furent nullement anecdotiques et se sont posées dès les premiers ages de l'écriture symbolique au XVIe siècle, même si les mathématiciens, en un temps premier, s'employèrent à les écarter, tel Viète et son *Vitium Negationis,* ci-dessous évoqué par Augustus de Morgan. Avec le temps cependant, et sous la pression authentique de problèmes mathématiques véritables, les géomètres se sentirent impérativement tenus de prendre sérieusement en compte trois Formes initialement sans signification, deux "exponentielles" ($a^{\frac{p}{q}}$ et a^{z}), l'autre "imaginaire" ($\sqrt{-1}$), qui avaient pu d'abord apparaître comme de ces fictions ou fantaisies, produites par une absurde concaténation de signes. La façon dont ils parvinrent à leur fournir une signification "naturelle" valut pour leçon de méthode, non seulement pour les géomètres du XVIIe siècle, Leibniz en tout premier lieu, mais à notre sens pour toute la postérité, incluant une part des mathématiques contemporaines: telle est la thèse que nous soutiendrons dans ce chapitre que nous introduirons par ce commentaire d'Augustus de Morgan[1]:

> " The first who used algebraical symbols in a general sense, Vieta, concluded that substraction was a defect, and that expressions containing it should be in very possible manner avoided. *Vitium negationis,* was his phrase. Nothing could make a more easy pillow for the mind, than the rejection of all which could give any trouble(...) The next and second step (...) consisted in treating the results of algebra as necessarily true, and as representing some relation or other, however inconsistent they might be with the suppositions from which they were deduced. So soon as it was shewn that a particular result had no existence as a quantity, it was permitted, by definition, to have an existence of another kind, into which no particular inquiry was made, because the rules under which it was found that the new symbols would give true results, did not differ from those previously applied to the old ones(...) When the interpretation of the abstract negative quantity shewed that a part at least of the difficulty admitted a rational solution, the remaining part, namely that of the square root of a negative quantity was received, and its results admitted, with increased confidence."

Ce texte important nous paraît bien dessiner les grandes lignes, tant historiques qu'épistémologiques, du traitement des Formes sans signification, particulièrement par ceci, qui sera plus

---

1 DE MORGAN A, *Trigonometry and Double Algebra.* London.1849, 98,99. Cf. CAJORI, II, 131.

amplement commenté ci-dessous : "The next and second step (...) consisted in treating the results of algebra as necessarily true". La description de la méthodologie y reste cependant bien imprécise, alors même qu'elle nous semble, aujourd'hui encore, bien souvent employée, quoique tacitement. Aussi proposons-nous dans ce chapitre, en une entreprise neuve à notre connaissance, une description -la plus précise que nous ayons pu faire- de la méthodologie historique de la prise en compte des Formes sans significations, puis sa conceptualisation sous la forme d'un schéma épistémologique.

14.1 L'exponentielle newtonienne.

14.1.1 L'*Epistola Prior*, ou la rencontre de Leibniz avec des Formes sans objet.

C'est au travers de la *Géométrie* de Descartes, que Leibniz avait fait la découverte, en 1674 à Paris, de l'écriture symbolique mathématique nouvelle. En un second temps, il rencontra tout un jeu de problèmes combinatoires et signifiants essentiels, soulevés par l'*Epistola Prior* de 1676, une correspondance que Newton lui adressa par l'intermédiaire d'Oldenbourg, alors secrétaire de la *Royal Society* [2]. On ne saurait trop souligner l'importance de l'*Epistola Prior* dans la vie de Leibniz; elle fut d'abord au temps de sa jeunesse une pièce maîtresse de la constitution de sa "pensée symbolique", selon l'expression de G. Granger[3]. Etroitement dépendante en apparence d'une Forme bien spécifique (l'exponentielle newtonienne), l'*Epistola Prior* constitua très vite en réalité, pour Leibniz, la source de questions d'ordre épistémologiquement supérieur, telles les places respectives de la nécessité et la contingence dans les définitions d'objets mathématiques, avant de se transformer sur la fin de sa vie en une pièce du procès en plagiat que lui intentèrent Newton et son clan.

Dans l'histoire des mathématiques, l'importance de l'*Epistola Prior* est incontestablement rapportée à la "formule du binôme" qu'y propose Newton, un résultat aujourd'hui considéré comme l'un des premiers développements en série entière d'une fonction usuelle[4] ; en cette fin du XVII[e] siècle, il était cependant regardé par son auteur, en une vision des choses assez surprenante aujourd'hui, seulement comme un moyen commode d'effectuer des "extractions de racines", opération jusque-là tenue pour délicate ou impossible[5]. Notre projet n'est cependant

---

2 *Bw*, op. cit, 179- 203. C'est le 13 juin 1676 que Newton adresse sa correspondance à Oldenbourg que celui-ci retransmet le 26 Juillet à Leibniz.

3 Cf. *Philosophie et Mathématique leibniziennes*, in Revue de Métaphysique et de Morale, 1, janvier-mars 1981.

4 En termes modernes, $(1+x)^{\alpha} = \sum_{n \in \mathrm{IN}} \frac{\alpha(\alpha-1)\dots(\alpha-(n-1))}{n!} x^n$, le rayon de convergence étant égal à 1 si α n'est pas un entier naturel.

320

5 "Fractiones in infinitas serias reducuntur per divisionem, et quantitates radicales per extractionem radicum, perinde instituendo operationes istas in speciebus istis ac institui solent in

pas d'ajouter ici une analyse à d'autres, à propos du contenu d'une formule largement étudiée depuis longtemps [6], mais d'examiner les questions symboliques qu'elle soulève, et la façon dont elles se sont présentées à Leibniz. Après un bref préambule, Newton livre abruptement à Leibniz son résultat général, en les termes suivants [7] :

$$\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}} = P^{\frac{m}{n}} + \frac{m}{n}A.Q + \frac{m-n}{2.n}BQ + \frac{m-2n}{3n}CQ + \frac{m-3n}{4n}DQ + \text{etc...}$$

Un canon qu'il fait aussitôt suivre d'un commentaire interprétatif que nous avons ainsi traduit :

> "...où P + PQ signifie une quantité dont on cherche une certaine racine ou une certaine dimension ou bien la racine de la dimension. P est le premier terme de cette quantité, Q les termes restants divisés par le premier, et $\frac{m}{n}$ l'indice numérique de cette dimension de ce même P+PQ, c'est-à-dire ou bien la dimension entière elle-même, ou bien la dimension rompue (comme on l'appelle), ou bien positive ou bien négative. Car de même que les Analystes à la place de aa, aaa, etc... ont l'habitude d'écrire a^2, a^3,
> de la même façon ,pour $\sqrt{a}$,$\sqrt{a^3}$,$\sqrt{c.a^5}$ j'écris $a^{\frac{1}{2}}$, $a^{\frac{3}{2}}$, $a^{\frac{5}{3}}$
> et pour $\frac{1}{a}$, $\frac{1}{a\,a}$, $\frac{1}{a^3}$, j'écris a^{-1} , a^{-2} , a^{-3} ." [8]

En première analyse, la formule se présente donc comme une mise à égalité entre la substance de la Forme amont $\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$ et

---

decimalibus numeris. Haec sunt fundamenta harum reductionum; sed extractiones radicum multum abbreviantur per hoc theorema (...)" (*Bw*, 180) L'exemple 1 de Newton est celui-ci :

$$\sqrt{cc+xx} \text{ (ou bien , dit-il: } \overline{cc+xx}^{\frac{1}{2}} \text{)}$$

L'objectif est d'effectuer l'extraction de la racine carrée, opération jusque-là impossible. Newton écrit :

$$cc + xx = cc + cc\,\frac{xx}{cc}$$

Il explicite donc qu'il prend dans la Forme amont les instantiations ci-dessous :

$$m = 1 \;;\; n = 2 \;;\; P = cc \;;\; Q = \frac{xx}{cc}$$

L'instantiation correspondante à l'aval fournit alors ce résultat (p 181)

$$\sqrt{cc+xx} = \frac{xx}{2c} - \frac{x^4}{8c^3} + \frac{x^6}{16c^5} - \frac{5x^8}{128c^7} + \frac{7x^{10}}{256c^9} + \text{etc...}$$

car dit Newton, on a, dans ce cas :

$$A = P^{\frac{m}{n}} = cc^{\frac{1}{2}} = c \text{ , } B\left(= \frac{m}{n}AQ\right) = \frac{xx}{2.c}, C\left(= \frac{m-n}{2n}BQ\right) = \frac{-x^4}{8c^3} \text{ et sic deinceps .}$$

[6] On citera par exemple la thèse de Michel Pensivy : *Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme.* Thèse de troisième Cycle. Université de Nantes, in Sciences et techniques en perspectives. Université de Nantes, 14, 1987-1988.

[7] On trouvera à l'annexe 3 du chapitre 11 un *fac simile* du texte de l'édition Gerhardt.

[8] *Bw*, 180. La "dimension" est pour Newton ce que nous appelons une puissance entière, et la "dimension rompue", une puissance rationnelle.

celle de l'aval, qui était alors, en termes newtoniens, une "série infinie". Répétons le : nous n'examinerons pas ici la signification de cette adéquation, pour seulement considérer l'interprétation de la Forme amont, que tout le commentaire introductif *supra* visait en réalité à définir. Nous ne reviendrons pas davantage à son propos sur un point strictement combinatoire déjà examiné en 11.3 : par l'emploi de $\frac{m}{n}$ à la place de l'exposant en effet, la formule de Newton offrait à Leibniz la première des littéralisations historiques à la place de l'exposant. Le point crucial pour nous est en effet ici autre : à l'époque de Leibniz, la Forme

$$\overline{P+PQ}^{\frac{m}{n}}$$

était sans objet, parce que sans substance. Chacune de ses Formes internes pouvait certes être interprétée, et d'abord P + PQ, qui dûment complétée par des parenthèses rondes et un Point, conduit à une Forme de niveau deux : (P + (P.Q)), bien simplement interprétée si P et Q sont les signes de nombres quelconques. De même, si m et n sont les signes d'entiers, $\frac{m}{n}$ est une Forme de niveau un, interprétée comme nombre rationnel (un *rompu*, dans la terminologie newtonienne). Dûment complétée, la Forme s'écrit :

$$(\, P+(\, P.Q)\,)^{\,(\frac{m}{n})}$$

La question qui demeure alors, seule mais majeure, est l'absence de signification de l'assembleur de niveau le plus élevé : le Blanc exponentiel. Ainsi, la procédure qui pouvait bien être conçue, ne pouvait-elle cependant se dérouler et produire une substance. Rien dans l'expérience préalable de Leibniz à cette époque, ni dans la définition cartésienne des exponentielles -la seule évidemment qu'il connût- ne pouvait lui laisser pressentir quelle signification Newton pouvait bien apporter à des Formes comme :

$$3^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou} \quad (\, x+3\,)^{\frac{1}{2}} \quad \text{ou bien} \quad 5^{\frac{2}{3}}, \ \text{ou bien encore} \quad (\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$$

dont le caractère interprétable découlait pourtant de la formule. Tout essai de traduction rhétorique sur le mode cartésien conduisait droit à des absurdités : si la procédure de la Forme 3^{5} peut en effet être décrite par : "multiplier le nombre de signe 3 cinq fois par lui -même", que pouvait bien signifier à propos de $3^{\frac{1}{2}}$, "multiplier ce nombre une demi-fois par lui même"? A Leibniz et aux géomètres de son temps pour qui ces Formes étaient sans substance, le commentaire de Newton apportait alors une définition claire, que nous reformulons ici sous forme rhétorique exhaustive [9] : "La procédure de la Forme $a^{\frac{m}{n}}$ est celle-ci : prendre la racine n-ième du nombre positif a et constituer ce

9 Dans le cas où a est le signe d'un nombre positif quelconque, et m et n sont tous deux les signes d'entiers positifs.

résultat. Elever ce résultat à la puissance m-ième."[10] Ainsi la substance de $a^{\frac{1}{2}}$ est-elle celle de $\sqrt{a}$; celle de $a^{-\frac{2}{3}}$ égale à celle de $\frac{1}{(\sqrt[3]{a})^2}$. Une définition aussitôt acceptée par toute la communauté mathématique, qui se répandit dans toute l'Europe, et fut par exemple reprise par Leibniz -à partir de 1684- dans tous les textes fondateurs publics du Calcul Différentiel, (cf. en 13.2.3.c notre analyse sur ce point de la *Nova Methodus...*). Ainsi, ce que nous appellerons désormais *exponentielle newtonienne* relève aujourd'hui encore d'une définition universellement reconnue.

14.1.2 Exponentielle newtonienne et canons électifs.

La question demeure cependant ouverte, de l'origine de cette symbolique raffinée d'exposants fractionnaires, qui dut paraître si étrange à ses premiers lecteurs, tel Leibniz. Newton ne donne ici pas la moindre tentative d'explication, pas plus d'ailleurs qu'il ne démontre la formule du binôme elle-même! Nous consacrons cette section à en détailler une explication, en vérité exemplaire.

La toute première apparition d'exposants rompus peut se repérer chez Wallis[11] peu de temps auparavant (1656). De façon quelque peu détournée, Wallis avait en effet préalablement évoqué la possibilité d'utiliser des exposants fractionnaires, sans toutefois en écrire aucun, ni justifier leur éventuel emploi. En l'absence de toute explication de Newton lui-même sur une notation pourtant si singulière, on se livrera ici à une reconstruction épistémologique qui sera à la fois conforme aux leçons de l'histoire, incontestables sur ce point comme on verra, et aussi à la pratique de l'enseignement moderne de cette partie de l'analyse mathématique. Rappelons d'abord cette évidence : la différence entre l'exponentielle cartésienne et l'exponentielle newtonienne se résume à celle des Clés d'interprétation de la Lettre z dans la Forme

$$a^z$$

Dans la Clé cartésienne, z est le signe d'un nombre entier naturel, dans la Clé newtonienne, celui d'un nombre irrationnel. Tout nombre entier est cependant un certain irrationnel, dont le dénominateur est égal à l'unité, ou bien encore dont le dénominateur

10 La procédure est en fait décrite par Newton. Elle est cependant un peu imprécise en ce qu'elle ne fixe pas l'ordre d'exécution : on aurait pu tout aussi bien commencer par élever à la puissance m-ième, constituer le résultat, puis prendre la racine n-ième de celui-ci. Il se trouve que les deux ordres d'exécution conduisent au même résultat, et qu'il n'est pas ainsi créé d'ambiguïté, le fait n'étant ni démontré, ni même évoqué par Newton.

Si l'un des deux entiers, par exemple de signe m, est négatif, alors avec m = - p, où p est le signe d'un entier positif, on commence par remplacer m par p dans la procédure précédente ce qui est légitime ; on prend ensuite l'inverse du dernier résultat constitué.

11 WALLIS, J : *Arithmetica Infinitorum* (1656), page 80, Propos. CVI. Comme le note CAJORI, I, page 354, Wallis utilise des exposants entiers naturels et parle d' "indices" négatifs ou fractionnaires, mais n'en écrit jamais aucun explicitement.

divise le numérateur. On découvre donc ici, en passant de la cartésienne à la newtonienne, ce que nous avons appelé une extension du champ de la Lettre z. Cette bien simple propriété était évidemment connue à l'époque de Newton et Leibniz. Dans ces conditions, la Forme (r. s) peut, en première analyse, recevoir deux schémas d'interprétation : la Clé cartésienne stipulera que r et s sont les signes de certains entiers indéterminés et le Point, le produit d'entiers. Pour la Clé newtonienne, r et s sont les signes de certains rationnels indéterminés et le Point, le produit de rationnels. Dans ces conditions cependant, la même Forme

$$(r.\,s)$$

pourrait, dans certains cas, être renseignée de deux façons incompatibles. D'une part, les Lettres r et s seraient des signes d'entiers *per se* et le Point interprété comme produit d'entiers; d'autre part les mêmes Lettres pourraient être interprétées comme certains de ces rationnels particuliers que sont des entiers et le Point interprété corrélativement comme produit de rationnels; il se pourrait alors que la substance de l'objet de (r. s) soit différente, selon l'une ou l'autre interprétation. En d'autres termes, la Clé newtonienne du Point, pourtant *corrélative* de l'extension newtonienne des champs, pourrait ne pas être *compatible* avec celui-ci. Il n'en est cependant rien dans cet exemple car, si m et n sont des signes d'entiers, on a selon la règle de multiplication des fractions :

$$\frac{m}{1} \cdot \frac{n}{1} = \frac{m\,.\,n}{1.1} = \frac{m\,.\,n}{1}$$

Ainsi la substance de (r. s) est-elle la même, quelle que soit la Clé, cartésienne ou newtonienne. Ce schéma de compatibilité, si simple ici qu'il peut paraître superflu, sera cependant le fondement de celui du prolongement, analysé ci-dessous. On observera d'ailleurs que cette compatibilité a demandé une démonstration, qui, pour simple qu'elle soit, aurait pu ne pas être valide.

Revenons alors à cette question invariable : comment fournir une signification à la Forme $a^{\frac{1}{2}}$, qui n'en a pas? La méthode est alors celle-ci : le géomètre fait choix d'une formule valide pour l'exponentielle cartésienne, parmi toutes celles que celle-ci était connue pour vérifier. Ce sera ici le "canon multiplicatif ", examiné en 11.3, c'est-à-dire :

$$(a^r)^s = a^{r.s},$$

valide si r et s sont les signes d'entiers naturels et a le signe d'un nombre positif quelconque. Un canon qui sera dit *électif* dans la suite. Si cependant r est interprété comme un nombre rationnel quelconque, soit $r = \frac{p}{q}$, alors la Forme $a^{\frac{p}{q}}$ est sans signification. Le fond de la méthode consiste alors à *définir*, si c'est possible, la substance de $a^r = a^{\frac{p}{q}}$, comme un nombre *tel* que le *même canon*

$$(a^r)^s = a^{r.s}$$

reste vrai pour toute valeur du couple de nombres rationnels [12], de signes r et s. Pour ce faire, on commencera par affirmer la validité du canon dans le cas particulier où le rationnel r est l'inverse d'un entier naturel, soit $r = \frac{1}{q}$. Prenant alors s = q ce qui est possible (tout entier est un certain rationnel), il vient :

$$\left(a^{\frac{1}{q}}\right)^{q} = a^{\frac{1}{q}\cdot q} = a$$

La seule inconnue dans cette relation est la signification à apporter à $a^{\frac{1}{q}}$; or elle est ici déterminée par cette équation et sa substance ne peut être que celle de $\sqrt[q]{a}$, ceci constituant à l'évidence une condition nécessaire pour que le "canon multiplicatif"soit extensivement vérifié. Par exemple :

$$\left(a^{\frac{1}{3}}\right)^{3} = a.\ \text{Donc} : a^{\frac{1}{3}} = \sqrt[3]{a}$$

A ce moment, si $a^{\frac{1}{q}}$ est bien pourvue de signification, il n'en est pas encore de même pour $a^{\frac{p}{q}}$, où p est le signe d'un entier naturel. Or on a évidemment :

$$p\,.\,\frac{1}{q} = \frac{p}{q}$$

de sorte que la satisfaction visée du même canon multiplicatif conduit à :

$$a^{\frac{p}{q}} = a^{\frac{1}{q}\cdot p} = \left[a^{\frac{1}{q}}\right]^{p} = \left[\sqrt[q]{a}\right]^{p}$$

La seule substance possible pour $a^{\frac{p}{q}}$ est donc celle de $\left[\sqrt[q]{a}\right]^{p}$, c'est-à-dire celle proposée par Newton. Il y a donc au plus une solution satisfaisant l'extension du canon. Un bref calcul [13] permet enfin de démontrer alors le caractère suffisant -au regard du canon multiplicatif- de la définition choisie, dont un autre calcul permet d'établir qu'elle satisfait aussi ce que nous avons appelé en 11. 3 le "canon exponentiel" :

$$a^{r}.\,a^{s} = a^{r+s}$$

où r et s sont devenus les signes de rationnels positifs, une satisfaction supplémentaire, bien utile, et qui n'était cependant nullement initialement visée par la méthode. Pour retrouver

---

12 Le Point de la Forme aval est alors le signe du produit de rationnels, extension du produit d'entiers.

13 Soient en effet r et s les signes de deux rationnels positifs tels que $r = \frac{p}{q}$ et $s = \frac{m}{n}$. Posons $C = a^{\frac{p}{q}}$ et $D = C^{\frac{m}{n}} = (a^r)^s$. On a $C = \sqrt[q]{a^p}$ et $D = \sqrt[n]{C^m}$.

Donc $C^q = a^p$ et $D^n = C^m$.

Enfin $D^{q.n} = (D^n)^q = (C^m)^q = (C^q)^m = (a^p)^m = a^{p.m}$

Comme $D^{q.n} = a^{p.m}$, il vient

$$D = \sqrt[q.n]{a^{p.m}} = a^{\frac{p.m}{q.n}} = a^{\frac{p}{q}\cdot\frac{m}{n}} = a^{r.s}$$

complètement Newton, il reste à étendre la définition au cas de rationnels négatifs [14]. On a donc par exemple :

$$a^{-\frac{2}{3}} = \frac{1}{\left[\sqrt[3]{a}\right]^2}.$$

Entre la prise de racines et celle de puissances, on peut enfin établir, comme autre "bénéfice", une propriété supplémentaire de commutativité : $\left[\sqrt[q]{a}\right]^p = \left[\sqrt[q]{a^p}\right]$, de sorte qu'on a par exemple :

$$a^{\frac{2}{3}} = \left[\sqrt[3]{a}\right]^2 = \left[\sqrt[3]{a^2}\right].$$

Ainsi, aura-t-on fait en sorte que, *par définition* de a^z, le canon multiplicatif soit valide au-delà de son champ originel, dans le cas où z est le signe d'un rationnel.

En dépit des apparences, notre reconstruction n'est cependant pas achevée. Pour épistémologiquement séduisante qu'elle soit en effet, au regard de la satisfaction d'un canon électif, la définition de l'objet de a^r aurait malgré tout pu être inacceptable *in fine*, parce qu'*incompatible* avec l'extension de champs de l'exposant : de l'entier cartésien vers le rationnel newtonien. Ce qu'avec sa perspicacité coutumière Leibniz releva aussitôt, dans une des nombreuses notes manuscrites -imprimées par Gerhardt- dont il couvrit les marges de la lettre de Newton [15]. Un rationnel étant donné, il existe en effet une infinité de couples d'entiers dont le rapport est égal à ce rationnel. La question est alors celle-ci : si l'on a $\frac{p}{q} = \frac{s}{t} = r$, *quid* de l'objet de a^r ? On a, en effet, d'une part $a^r = \left[\sqrt[q]{a}\right]^p$, d'autre part $a^r = \left[\sqrt[t]{a}\right]^s$. Ainsi le géomètre reçoit-il naturellement deux substances pour une même Forme : elles pourraient être distinctes, ce qui serait contradictoire. En fait, on démontre ici simplement qu'il n'en est rien [16]. Observons plutôt que la question est en fait équivalente à cette autre, exprimée en termes

---

14 La méthode, identique, utilise cette fois pour canon électif, précisément le "canon exponentiel" dont on vient d'établir la validité pour des rationnels positifs, en l'étendant au cas des rationnels quelconques, selon ce schéma : si r est le signe d'un rationnel positif, -r est celui d'un négatif, et la *définition* de la substance de a^{-r} est *telle* que l'on ait :

$$a^r \cdot a^{-r} = a^{r+(-r)} = a^0 = 1.$$

Il vient donc $a^{-r} = \frac{1}{a^r}$ et $a^{-\frac{p}{q}} = \frac{1}{\sqrt[q]{a^p}}$

c'est-à-dire ce que Newton avait proposé à Leibniz.

15 "Eadem quantitas infinitis modis hinc haberi potest faciendo m, n alias atque alias, eadem semper manente $\frac{m}{n}$." (*Bw*, 180).

16 En posant en effet $b = \left[\sqrt[q]{a}\right]^p$ et $c = \left[\sqrt[t]{a}\right]^s$

on a $b^q = a^p$ et $c^t = a^s$ de sorte que

$b^{q.s} = (b^q)^s = (a^p)^s = (a^s)^p = (c^t)^p = c^{t.p}$. Or $q.s = t.p$

Donc $b^{q.s} = c^{q.s}$ et $b = c$.

d'extension de champs : à un entier de signe m, est associée son exponentielle "cartésienne" de Forme a^m ; d'un autre côté, tout entier est un certain rationnel, et ce d'une infinité de façons, puisque m = $\frac{m}{1} = \frac{k.m}{k}$ pour tout entier k non nul. On va montrer, ce qui avait précisément attiré l'attention de Leibniz, que les substances de a^m (au sens cartésien) et de $a^{\frac{k.m}{k}}$ (au sens newtonien) sont cependant les mêmes pour tout k (par exemple que a^3 et $a^{\frac{6}{2}}$ ont même substance). Et en effet, si l'on pose

$$\alpha = a^{\frac{k.m}{k}} = \sqrt[k]{a^{k.m}}$$
alors $\alpha^k = a^{k.m}$, et $\alpha = a^m$.

Et la satisfaction de cette proposition est en vérité cruciale, comme Leibniz l'avait effectivement pressenti. On a en effet déjà bien souligné la contingence de la définition de Newton : la substance de $a^{\frac{p}{q}}$ pouvait ne pas être, ou bien différente de celle qu'il proposait, comme le montre à l'évidence le caractère *électif* du canon. Cependant, et dès lors que Newton affichait une définition, quelle qu'elle fût, il était nécessaire que les substances de a^3 et $a^{\frac{6}{2}}$ fussent dans tous les cas les mêmes. Dès 1676 donc, et avec la force de sa simplicité, l'exemple newtonien exposait ainsi à l'endroit de Leibniz cette leçon de philosophie essentielle qui vient articuler une distinction véritable entre nécessité et contingence.

La satisfaction de la compatibilité, en établissant que la définition newtonienne nouvelle de a^r, où r est le signe d'un nombre rationnel, *respecte* l'extension des champs, des entiers vers les rationnels, permet enfin, sans ambiguïté aucune au regard de cette extension, l'appréhension de la Forme newtonienne. L'extension du champ objectal de la Lettre r constitue ce que nous appellerons ci-dessous un *coiffement*, cependant que la méthodologie à l'oeuvre sera le fondement et aussi le premier exemple de que nous appellerons plus abstraitement un *prolongement* (ces deux termes nouveaux sont définis et commentés en 14.3). Dans cet exemple comme dans ceux qui suivent, le géomètre semble avoir gagné sur deux tableaux : en premier lieu, il a fourni une signification à une Forme qui n'en avait pas. Dans le même geste, il a considérablement étendu le champ de validité du canon multiplicatif.

Les extensions sur la Forme a^r ne se limitèrent cependant pas à ce cas newtonien et, avant d'examiner abstraitement l'épistémologie du prolongement, nous décrirons d'abord la suite des avatars de l'exponentielle.

14.2. L'exponentielle "leibnizienne."

14.2.1 L'*Epistola Posterior.*

Leibniz fut sans doute grandement impressionné par l'*Epistola Prior,* comme en témoigne sa réponse du 27 Août [17], un peu embarrassée. Newton répondit à son tour le 24 Octobre 1676, toujours par l'intermédiaire d'Oldenbourg [18]. Dans ses tous derniers paragraphes [19], cette correspondance, aujourd'hui appelée *Epistola Posterior,* contenait à l'intention de Leibniz une nouvelle extension de l'exponentielle, rédigée en ces termes :

> "Communicatio Resolutionis Affectarum per Methodum Leibnitii pergrata erit, juxta et Explicatio Quomodo se gerat, ubi Indices potestatum sunt Fractiones, ut in hac Aeaquatione $20 + x^{\frac{3}{7}} - x^{\frac{6}{5}} y^{\frac{2}{3}} - y^{\frac{7}{11}} = 0$ aut Surdae Quantitates, ut in hac $\overline{x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}}\,^{\sqrt{(3)\frac{2}{3}}}$ ubi $\sqrt{2}$ et $\sqrt{7}$ non designant Coefficientes ipsius x, sed indices Potestatum seu Dignitatum ejus et $\sqrt{(3)\frac{2}{3}}$ indicem Dignitatis $x^{\sqrt{2}} + x^{\sqrt{7}}$. "

Et Newton d'ajouter : "Res, credo, mea methodo patet aliter descripsissem." Il proposait donc à Leibniz une autre signification à la Forme a^r, par une nouvelle extension du champ objectal de la Lettre r : la substance désormais permise à l'exposant étant celle des nombres sourds (par exemple un irrationnel quadratique comme $\sqrt{7}$). L'exemple de Newton -sans autre intérêt que pédagogique- est particulièrement suggestif: il contient une superposition de deux tels exposants, l'un à l'intérieur d'une Forme élémentaire (le binôme), l'autre dans l'exposant du binôme. Une écriture newtonienne qui n'a certes pas dû manquer de surprendre à nouveau Leibniz. Quant à la signification de sa Forme exponentielle neuve, Newton n'en fournit cette fois aucune. Les dernières lignes sont particulièrement sybillines : la chose dit-il découle, à l'évidence de sa méthode et il en fera ailleurs la description.

Fin 1676, la situation de Leibniz était ainsi la suivante: tout juste sorti de l'écriture rhétorique des mathématiques de sa jeunesse, grecque et scolastique, il avait rencontré, deux ans auparavant seulement, dans la *Géométrie* de Descartes, l'écriture mathématique nouvelle, et aussi l'exposant cartésien, d'un emploi tout récent à cette époque. Et on a déjà plusieurs fois souligné dans cette thèse à quel point il

17 *Bw,* 193- 203.
18 *Bw,* 203.
19 *Bw,* 225.

avait été important, dans la conception cartésienne, qu'au lieu de l'exposant vienne un Chiffre pur. Ainsi Leibniz avait-il été tenu de se familiariser, rapidement et grandement, avec la symbolique nouvelle, fort éloignée pourtant des considérations de sa jeunesse. Or voici que deux ans après sa rencontre avec la *Géométrie*, et en moins de quatre mois (Juillet - Octobre 1676) il se trouva, du fait de Newton cette fois, devant la nécessité d'intégrer dans ses conceptions deux Formes exponentielles encore nouvelles, obtenues par deux extensions de champ successives (rompus, puis sourds) à partir de la même Forme cartésienne initiale, de surcroît littéralisée par les soins de Newton. Que la première version de l'exponentielle newtonienne, *rompue*, dans l'*Epistola Prior* fut correctement et complètement définie, alors que la seconde, *sourde*, dans l'*Epistola Posterior* ne le fut aucunement, ne constitua pas -comme on verra- un souci important pour Leibniz, qui en tira par contre cette double conclusion : d'une part, que la Forme exponentielle cartésienne n'était certes pas combinatoirement figée, contrairement à ce que la force d'une tradition toute récente tendait à faire croire. D'autre part, que toutes les questions de signification étaient en vérité subalternes au regard de la puissance des réalités combinatoires (le primat de la Forme exponentielle). Saisissant alors l'essence même du procédé newtonien, Leibniz s'employa dès ce moment à construire une Forme exponentielle complètement neuve :

$$a^{z} \text{ ou } x^{z}$$

dont l'importance dépasserait, croyait-il, celle de Newton même. La question était alors évidemment : quel pouvait bien être l'objet d'une Forme où, à la place de l'exposant, venait le signe d'un nombre quelconque, *indéterminé* ? Une exponentielle que nous dirons "leibnizienne", qui constitua pour lui le premier et le plus important des trois volets de ce qu'il dénomma la transcendance, au sens mathématique[20].

14.2.2 *Gradus indefinitus* et transcendance mathématique.

Nous avons évoqué en 11.7 la lettre-bilan de Leibniz à Tschirnaus de Mai 1678, un an et demi après son départ de Paris [21]. Nous

---

20 Selon H. Breger (*Leibniz, Einfürhung der Transzendenten*, Studia Leibnitiana. Sonderheft, 14, 1986, p 119-132), c'est dans le manuscrit d'une lettre de Leibniz à Oldenburg du début mars 1675 que Leibniz introduisit pour la première fois le terme de "transcendant" dans un contexte mathématique, mais le terme a disparu dans la version définitive de la lettre, sans doute le signe d'une réflexion supplémentaire que Leibniz a voulu s'accorder, relativement à un terme et un concept qui deviendront vite très importants pour lui, mais dont il a sans doute pensé à ce moment qu'ils n'étaient pas encore mûrs. Curieusement, on ne le trouve cependant pas davantage dans les correspondances avec ce même Oldenbourg dans les années qui suivirent. Très tôt par contre, le terme revient fréquemment (à partir de 1678) dans les correspondances depuis Hanovre avec Tschirnaus resté à Paris, puis émigré à Rome. Aussi en 1681 (Leibniz à Tschirnaus : *Bw*, 409). C'est en 1682 qu'il apparaît imprimé pour la première fois (dans le *De Vera proportione*...). Dès lors, il se répand dans ses écrits : en 1684 (M.S, V, p124, 223, 228, 229), puis en 1686 (M.S, V, 128), enfin dans toute son oeuvre postérieure.

21 *Bw*, 372-382.

en commentons ici ce qu'elle contient de l'introduction de la transcendance, que Leibniz expose à son ami, la réponse de Tschirnaus qui relève le terme ("transcendentes, ut vocas") montrant bien qu'il s'agit d'une première introduction [22]. Les derniers mots de Leibniz sont bien clairs : pour lui, d'une part transcendant équivaut à non analytique, d'autre part le modèle du transcendant à cette époque est celui des équations dans lesquelles l'"inconnue entre dans l'exposant", comme, dit-il

$$x^y.$$

C'est donc bien cette Forme neuve qui constitue le modèle premier de la transcendance. Et l'objectif mathématique de Leibniz est sur ce point précisément détaillé : si en effet, comme il le croit à cette époque, toutes les quadratures concevables peuvent être ramenées à des équations transcendantes -avec la Forme exponentielle indiquée- dont il donne un exemple clair [23]:

$$x^y + \overline{y\ a^x} + \text{etc. aequ . O}$$

il faut donc promouvoir une analyse complète de ces nouvelles équations de façon, dit-il : soit à les ramener à des équations ordinaires, soit à démontrer l'impossibilité d'une telle transformation, soit enfin à démontrer qu'il est impossible que toutes les quadratures s'expriment à l'aide de telles équations. On ne pourra qu'admirer la rigueur et la précision d'une telle entreprise méthodologique, mais en même temps regretter la complète absence de signification apportée par le texte à la Forme

$$x^y$$

à partir de laquelle elle est pourtant censée s'exercer. Répétons le : quelles pouvaient bien être à cette époque la procédure et la substance d'une Forme où, à la place de l'exposant, venait le signe d'un nombre *indéterminé* ? Si aucune réponse en provenance de Descartes, ni même de Newton ne pouvait ici venir, Leibniz lui-même n'en apportait pas davantage. La lettre à Tschirnaus indique cependant bien la frontière que Leibniz à cette époque aurait voulu tracer entre le transcendant et l'analytique : l'indétermination de l'exposant (*gradus indefinitus*) en quoi il plaça l'essence même de la transcendance, et par quoi il estimait pouvoir surpasser à la fois Descartes et Newton. Et Leibniz a en effet d'abord considéré que Descartes a eu raison contre les Anciens, puisqu'il a "accueilli dans sa géométrie" des exposants quelconques, mais qu'il n'en avait pas fait assez :

---

22 Dans ce premier texte, Leibniz donne au terme *transcendant* l'acception de *non analytique* (le terme est dans la lettre) : " Hac utique methodo area figurae propositae non potest inveniri,quando nec
330 per aequationem inveniri potest,per aequationem,inquam,communem, alioqui enim etiam quantitates transcendentes seu (si ita apellare libet) non analyticae per aequationes , sed transcendentes (in quibus incognita exponentem ingreditur) exprimi possint."

23 Extrait de l'édition Gehrardt, on trouvera un *fac simile* de la Forme en 11.7.

"Les Anciens ne voulaient pas utiliser les lignes d'un plus haut degré et les solutions qui en provenaient (...) Descartes critique ceci et accepte en géométrie toutes les courbes, celles dont la nature est Algébrique en quelque équation, ou bien qui peut être exprimée par un degré fixé. Ceci est certes juste; cependant il commettra en cela une faute qui n'est pas moindre que celle des anciens (...) car toutes les autres infinies, il les exclut de la géométrie, celles qui peuvent être cependant décrites, même avec précision parce que, sans doute il n'a pu les ramener à des équations pour ensuite leur appliquer ses règles mais, en vérité, il faut savoir que celles-là même aussi, comme la Cycloïde ou la Logarithmique, et les autres du même genre dont on fait le plus grand usage, elles se peuvent exprimer par le calcul, et même par des équations finies, mais non par des équations algébriques, qu'elles soient de degré fini ou indéfini, ou transcendantes; ainsi peut-on, de la même manière les soumettre au calcul tout comme les autres; il est possible que ce calcul soit d'une autre nature que celui dont on fait communément usage." [24]

A Descartes, Leibniz préfèrera ainsi Newton, même si, à ses yeux, ce dernier n'est pas allé non plus tout à fait assez loin. Comme l'avait abondamment montré l'*Epistola Posterior*, Newton accueille en effet des irrationnelles en Géométrie. Voici Leibniz:

"(...) du très perspicace Newton qui appelle irrationnelles Géométriques celles que Descartes n'accueille pas dans sa géométrie; mais celles-ci, je les distingue des transcendantes, de la même façon que le genre de l'espèce." [25]

Mais le dépassement de Newton fait aussi partie de la stratégie de Leibniz ; et il le devra, pense-t-il, à l'originalité et la force de sa propre création de ces archétypes de la transcendance que sont les Formes exponentielles avec *gradus indefinitus* [26]. C'est donc bien la variabilité de l'exposant qui fonde la conception leibnizienne première du "transcendant" dans son acception mathématique (*transcendans* : qui dépasse tout degré fixé) [27].

---

24 M.S, V, 124 (1684).

25 Leibniz à Wallis (1697) M.S, V, 28.

26 Leibniz aurait souhaité que toutes les fonctions transcendantes relèvent de ce cas privilégié, mais il se rend peu à peu compte qu'il n'en est rien. Aussi, dans des textes ultérieurs, modifie-t-il la structure même de ses définitions. C'est ainsi que dans une lettre à Jean Bernoulli (M.S, III, 319), il appellera "expressions parcourantes" (*percurrentes*) les expressions non-algébriques les plus générales: "elles sont pour moi comme le genre" dit-il, et "transcendantes" la sorte plus particulière des exponentielles, comme x^y: "elles en sont l'espèce la plus achevée". Jean Bernoulli reprendra à son compte cette même distinction (dans un sens encore légèrement différent), en hommage, dit-il, à Leibniz. 331

27 Ainsi Leibniz qui était philosophe, aura-t-il ici importé en mathématiques un terme du vocabulaire philosophique (*transcendans* : qui dépasse le champ de l'expérience simple), mais dans son sens littéral et sans aucunement le charger des connotations philosophiques dont il était porteur. (Sur ce point, cf. Breger, *Leibniz, Einfürhung der Transzendenten*, op. cité, 125, note 36). A le lire en détail, on ne

Au regard d'objectifs aussi ambitieux, on détaillera maintenant ce qu'il faut bien appeler, au-delà de la lettre à Tschirnaus, l'échec durable de Leibniz. A aucun moment dans son oeuvre, fût-ce de façon implicite, grossière, ou par approximations rationnelles, Leibniz n'a en effet fourni de procédure et donc de signification, à des Formes comme a^y ou x^y. La Lettre y étant évidemment interprétée comme un nombre quelconque indéterminé, ce qui à l'évidence aura définitivement manqué ici aura été une signification opératoire corrélative de l'assembleur, le "Blanc" exponentiel. Comment dans ces conditions expliciter ou même seulement évoquer une méthode du calcul de la substance de x^y ? En vérité, Leibniz ne semble même pas s'être posé la question de la procédure de cette Forme. Pas davantage en effet ne fournira-t-il des jeux divers d'exemples de calcul qui auraient au moins permis, comme plus tard chez Euler, d'induire une pratique du calcul. En vérité Leibniz n'impliqua jamais cette Forme dans *aucun* calcul vraiment significatif. Au regard de l'histoire qui allait suivre, nous pouvons aujourd'hui dire qu'il avait bien eu l'idée de la Forme, mais fort peu de sa signification. Dès lors, placés devant une situation aussi complexe de reconnaissance de paternité, maintiendrons-nous ici l'emploi de guillemets pour désigner l'exponentielle "leibnizienne". Sur ce point pourtant crucial pour lui, la réflexion de Leibniz fut en vérité étonnemment courte et se limita le plus souvent à la considération de cette très banale équation : " $x^x + x = 30$, dont $x = 3$ est une solution". Un exemple trop simple (x est le signe d'un entier naturel) qu'il affectionna et ne cessa de reprendre, sans jamais le dépasser [28].

14.2.3 Le canon logarithmique et l'exponentielle "indéterminée".

Durant les années qui suivirent au XVII^e siècle ces réflexions de Leibniz, puis durant tout le XVIII^e siècle, on vit alors se développer une situation bien curieuse, au sujet de la Forme

$$a^z$$

où z est interprété comme un nombre quelconque [29]. Sans davantage la définir que Leibniz, les géomètres qui suivirent, de Jean Bernoulli à Euler, considèrerent en effet le plus souvent que sa signification était bien connue, perpétuant ainsi à la fois les insuffisances conceptuelles et les conclusions de Leibniz. L'exemple le plus frappant est sans doute celui d'Euler qui avec l'*Introductio Analysin Infinitorum* [30], son traité majeur de 1748, visait à constituer la somme des connaissances

peut s'empêcher de penser que c'est à lui-même, se comparant à Descartes et Newton, que Leibniz voulait en vérité appliquer le terme de *transcendans*.

332
28 Par exemple : M.S, V, 27.
29 a étant, comme d'ordinaire, le signe d'un nombre positif quelconque.
30 Nous utiliserons la traduction française de J.B Labbey, sous le titre *Introduction à l'Analyse infinitésimale*. Paris. Bachelier. 1835.

en Analyse mathématique de son temps. Dans le Chapitre VI (*Des quantités exponentielles et des logarithmes*, pages 69-84) il considère pourtant, sans autre forme de procès la définition de a^z comme allant de soi, avec ce seul commentaire :

> "On distingue plusieurs espèces de quantités exponentielles, suivant que l'exposant seul, ou que l'exposant avec le nombre qu'il affecte est une quantité variable; a^z est de la première espèce, & y^z de la seconde."[31]

En une profonde différence avec Leibniz, Euler va cependant fournir dans toute la suite du chapitre VI, des occurences d'emploi de la Forme, qui en autorisent aujourd'hui le décryptage et la compréhension. D'abord il note [32] : "Ainsi $a^{\sqrt{7}}$ sera une valeur déterminée comprise entre les limites a^2 & a^3." Une remarque qui ne vaut certes pas pour définition de $a^{\sqrt{7}}$, mais seulement pour son encadrement, fournissant ainsi néanmoins un ordre de grandeur de sa valeur, en une démarche qui peut aujourd'hui sembler naturelle, voire nécessaire, mais que, ni Leibniz, ni surtout Newton, inventeur dans l'*Epistola Posterior*, de Formes comme $a^{\sqrt{7}}$, n'avaient pourtant proposée. Plus loin dans le texte [33] se dégage plus clairement la conception implicite que se faisait Euler de l'objet de la Forme a^z. Nous reproduisons cet extrait (§ 101), dans lequel Euler a précédemment posé $y = a^z$:

> "Si étant donné le nombre a, on peut conclure de chaque valeur de z, celle de y ; réciproquement ayant pris pour y une valeur queconque positive, on conçoit qu'il existe pour z un nombre convenable pour que $a^z = y$; cette valeur de z, en tant qu'elle peut être regardée comme une fonction de y s'appelle ordinairement le LOGARITHME de y."

Autrement dit, la définition eulérienne implicite de la substance de a^z est celle du nombre dont le logarithme vaut z (il s'agit du logarithme de base a). Ceci, qui est la définition actuelle, demande, à notre sens une analyse épistémologique détaillée. Ainsi consacrons-nous la suite de cette section à l'exposé du véritable fond de cette définition, telle qu'on la donne aujourd'hui et telle donc qu'elle est implicite chez Euler. La méthode impliquant un incontournable "canon logarithmique", il convient d'exposer brièvement l'état de la question à l'époque d'Euler. Introduits au début du XVII^e siècle (1614 et 1619) par John Napier [34], les logarithmes avaient été largement popularisés par la *Logarithmotechnia*

---

31 idem, page 69.

32 ibidem, § 97, page 70.

33 ibidem, 72.

34 *Mirifici Logarithmorum Canonis Descriptio* (1614) et l'ouvrage posthume *Mirifici Logarithmorum Canonis Constructio* (1619).

de John Mercator (1668), un ouvrage qui avait grandement influencé Leibniz dans sa Quadrature arithmétique du cercle. La propriété essentielle des logarithmes se résume en ce canon qui "échange produit et somme", et que nous dirons *logarithmique* :

$$\log(a.\,b) = \log(a) + \log(b)$$

où a et b sont les signes de nombres réels positifs quelconques et où la concaténation de lettres

log

qui a les propriétés combinatoires d'un assembleur à une place, s'interprète comme l'instruction de "prise de logarithmes"; on dit évidemment aujourd'hui qu'il représente la "fonction logarithme". En prenant égales les substances de a et b, le canon devient équivalent à :

$$\log(a^2) = 2.\log(a), \text{ puis}$$

$$\log(a^p) = p.\log(a) \text{ où}$$

p est le signe d'un entier positif. D'un autre côté en substituant $\sqrt[p]{a}$ dans le canon précédent, partout au lieu de a, on obtient en utilisant des exponentielles newtoniennes :

$$\log\ [(\sqrt[p]{a})]^p = p.\log(\sqrt[p]{a}) = p.\log(a^{\frac{1}{p}}) \qquad (1)$$

Or $[(\sqrt[p]{a})]^p = a$ de sorte que :

$\log(a^{\frac{1}{p}}) = \frac{1}{p}.\log(a)$ si p est le signe d'un entier naturel. Enfin, si q est le signe d'un autre entier naturel, on a évidemment

$$(a^{\frac{1}{p}})^q = a^{\frac{q}{p}}$$

de sorte qu'en appliquant à nouveau (1), il vient :

$$\log(a^{\frac{q}{p}}) = \frac{q}{p}.\log(a)$$

Ainsi "$\log(a^z) = z.\log(a)$" est-elle une relation valide si z est le signe d'un nombre rationnel positif. On démontre sans difficulté l'extension du canon au cas où z est le signe d'un rationnel négatif, de sorte qu'est valide le canon:

$$\log(a^z) = z.\log(a)$$

où a est le signe d'un nombre réel quelconque, et z celui d'un *rationnel* quelconque, ce qui est très précisément la Clé objectale newtonienne de a^z. La question revient alors à celle-ci, peu nouvelle : comment donner une signification à la même Forme si z est extensivement le signe d'un nombre réel quelconque? Comment donner une signification à une Forme qui n'en a pas? On observe ici encore un coiffement, ou extension du champ objectal traitant, de la Lettre z : des rationnels vers les nombres quelconques. Et cette extension est en vérité considérable : le fond de notre preuve *supra* de la validité du canon

$$\log(a^z) = z.\log(a)$$

a en effet organiquement impliqué d'y considérer que la substance de z était celle d'un rationnel. Si ce n'est plus le cas, la
334 question revient alors, comme d'ordinaire, à l'absence de signification de l'assembleur, le Blanc exponentiel. Pour donner une signification à une Forme qui n'en a plus, on devra donc, si c'est possible, fournir au Blanc

une signification adaptée à sa nouvelle situation. La méthode consiste en un premier temps, exactement comme tout à l'heure, à faire choix d'un canon électif, parmi tous ceux que vérifie l'exponentielle newtonienne. Ce sera ici le canon logarithmique sus-nommé; ensuite d'observer, comme tout à l'heure Euler, que quand le logarithme d'un nombre est donné, de façon arbitraire, le nombre lui-même l'est, d'une et d'une seule façon. C'est à la présence chez Euler de cette remarque essentielle que nous avons cru pouvoir lui attribuer une définition implicite de la Forme. Quoiqu'il en soit, z étant le signe d'un nombre quelconque,

$$z.\log(a)$$

est donné, et il existe un et un seul nombre positif u tel que

$$\log(u) = z.\log(a)$$

La méthode consiste alors à poser que la *définition* neuve de la Forme a^z est *telle* que sa substance soit égale à celle de u, c'est-à-dire telle que l'on ait :

$$\log(a^{z}) = z.\log(a)$$

En d'autres termes que, *par définition* de a^z, le canon fondamental logarithmique est valide au-delà de son champ originel, dans le cas où z est le signe d'un nombre quelconque. On reconnaît le même schéma que plus haut, que De Morgan avait ainsi fort bien résumé "faire comme si le canon était vrai" *(treating the results of algebra as necessarily true).* Ainsi a-t-on ici défini une signification encore nouvelle pour le Blanc, ci-dessous appelée une Clé *opératoire corrélative* (du coiffement): d'une part cette signification permet désormais d'opérer sur l'objet nouveau de z (*i.e* au regard du coiffement). D'autre part, la nouvelle interprétation du Blanc est *compatible* avec l'ancienne au sens suivant : la méthode a exclu la situation d'ambiguïté où la même Forme a^z pourrait *a priori* recevoir deux significations selon que la Lettre z est interprétée comme un rationnel *per se* (dans le cadre du couple de Clés originaires) ou bien le même z interprété comme un rationnel qui serait une instance, un cas particulier, d'un nombre réel quelconque (cadre des Clés d'extension). Dans ce passage du newtonien au "leibnizien", on reconnaît la même problématique qu'entre le cartésien et le newtonien. Et tout comme ci-dessus, la définition choisie pour a^z convient dans tous les cas, parce que désormais gouvernée par un même canon et que celui-ci était à l'évidence originairement valide, puisque c'est de lui qu'on est parti. Une Clé opératoire corrélative vérifiant ainsi cette condition supplémentaire de compatibilité sera par nous ci-dessous appelée un *pont*, la définition étant commentée en 14.3. C'est ainsi que dans notre cas se trouva dénouée dans les faits l'énigme que Leibniz n'avait pas même voulu prendre en compte.

On rappellera cependant en conclusion qu'aucune définition d'exponentielle, qu'elle fut newtonienne ou "leibnizienne" ne fut convenablement exposée par Newton et Leibniz eux-mêmes, ni ultérieurement par Euler, cependant que ces géomètres en firent
rapidement un usage constant et sûr. En vérité, grandement surprenantes

en un premier temps - on songe à Leibniz devant l'*Epistola Prior* - les définitions des objets des Formes neuves furent très vite considérées comme utiles, et dès lors, par un premier glissement, substantielles, même si, rétrospectivement, elles n'avaient pas été, à nos yeux, correctement définies. Si elles avaient été purement arbitraires ou seulement une fantaisie de l'esprit humain, comment les définitions des objets des Formes

$3^{\frac{1}{2}}$ ou $(x+3)^{\frac{1}{2}}$ ou bien $5^{\frac{2}{3}}$, ou bien encore $(\sqrt{2})^{-\frac{6}{7}}$

auraient-elle bien pu conduire à des résultats cohérents ? Telle sont les réflexions qui ne manquèrent sans doute pas de s'imposer, hier comme aujourd'hui. Et les prétendues "significations" apparurent alors comme nécessaires au regard des impératifs quotidiens du calcul qui les avait intégrées. Plus tard encore vint le temps où une définition véritablement correcte put enfin être apportée à ces Formes sans significations, parfois très tardivement, aux XVIII^e^ et XIX^e^ siècle pour les exponentielles, au XX^e^ pour les "imaginaires". Dès lors, et par un ultime glissement dialectique platonisant, aujourd'hui encore si souvent constaté, ces définitions, de nécessaires qu'elles étaient devenues, apparurent au *working mathematician* comme "naturelles", en une qualification qui s'inscrit comme le terme indépassable d'une évolution qui va du surprenant à l'utile, puis au nécessaire, enfin au "naturel". Sur cette question d'un concept mathématique "naturel", nous renvoyons à l'article de G. Granger déjà cité [35].

Dans nos deux exemples, le géomètre pouvait croire avoir gagné sur deux tableaux : en premier lieu, il avait fourni une signification à une Forme qui n'en avait pas. En même temps, il avait considérablement étendu le champ de validité des canons, multiplicatif ou logarithmique, qui pouvaient ainsi apparaître comme dépositaires *per se* d'une forme supérieure de vérité, à la fois intrinsèque et élargie et qui aurait constitué par exemple l'essence supposée du "logarithme". Une position encore raffermie dans le second exemple par l'examen des "bénéfices" de la procédure : comme dans le cas newtonien en effet, le géomètre pouvait constater par le calcul que le canon exponentiel

$$a^z . a^t = a^{z+t}$$

qui n'avait pas été visé par le prolongement, était néanmoins encore valide au regard de la nouvelle extension [36], renforçant encore considérablement le sentiment du géomètre d'être en présence d'un concept "naturel". Aujourd'hui encore, l'inclination à considérer ultimement comme "naturel" ce qui avait initialement pu apparaître comme sidérant nous semble un fait psychologique avéré dans la

336

35 *Sur l'idée de concept mathématique "naturel"*, in *formes, opérations, objets*.. Vrin. Paris. 1994. 157-182.

36 On a en effet, avec des logarithmes de base a :
$\log(a^z . a^t) = \log(a^z) + \log(a^t) = z + t$. D'un autre côté, $\log(a^{z+t}) = z + t$.

communauté des mathématiciens. Revenons à nos modestes exemples pour constater qu'en vérité on ne gagne jamais sur plus d'un tableau, et que cette forme d'illusion, pourtant créatrice et généreuse, sans doute un des moteurs de la recherche mathématique, se fonde sur l'oubli momentané de la solidarité véritablement indissoluble de la méthode du canon électif d'une part, de l'apport de significations d'autre part, ce que résume bien cette dialectique déjà deux fois éprouvée : la *définition* nouvelle est *telle* que le canon soit extensivement vérifié.

14.3 Le schéma du prolongement.

14.3.1 Clés objectales et extensions de champs objectaux.

De ces deux exponentielles, newtonienne comme "leibnizienne" se dégage à l'évidence une structure répétitive commune qui dépasse leur singularité. A partir d'elles, nous élaborons dans cette section un schéma épistémologique abstrait appelé *prolongement.* Une méta-procedure en vérité, fréquemment utilisée depuis le XVII^{e} siècle dans l'invention mathématique. Nous détaillons ensuite en 14.4 les étapes épistémologiques de la création moderne des nombres complexes, offrant ainsi un autre exemple d'application de ce même schéma, agrémentée toutefois d'une subtile variante méthodologique (le changement de cadres). Nous proposons enfin en 14.5 une liste d'exemples d'emploi du schéma dans des secteurs mathématiques divers, modernes ou contemporains.

Revenons d'abord à l'exemple simple d'une Lettre, telle

$$a$$

qui est une Forme de niveau zéro, ainsi interprétée : "a est le signe d'un certain entier indéterminé." Toute Clé d'interprétation, donnant ainsi l'objet d'une Lettre, sera simplement dite *objectale.* Comme on l'a déjà noté, la procédure de l'objet, dans ce cas d'une Forme de niveau zéro, se résume à la dénomination ; d'un autre côté, sa substance appartient à une espèce mathématique, ici celle de nombre entier. Rappelons aussi que cette espèce a été dénommée le champ de la Lettre a, au regard de la Clé concernée.

A propos de la même Lettre, on peut cependant se proposer aussi, comme dans l'exemple newtonien, cette seconde Clé objectale : "a est le signe d'un certain rationnel indéterminé". On a déjà souligné comment le champ de la Lettre au regard de la Clé neuve contient ici celui de la même Lettre pour la Clé originaire : nous dirons que la Clé neuve est d'*extension* relativement à la Clé originaire ou encore un *coiffement.* Dans un coiffement donc, le territoire que la substance de l'objet de a était initialement assujetti à décrire se trouve plongé et recouvert dans les limites d'un territoire plus large, et qui l'enveloppe [37].

Cette situation d'extensions de champs est aujourd'hui usuelle en mathématiques. Historiquement, comme l'ont bien montré nos deux exemples, ce furent les nombres les premiers concernés : tout nombre "sourd" (irrationel quadratique) est ainsi un certain irrationnel; tout irrationnel est un transcendant particulier et tout nombre réel, un certain nombre complexe (sur ce point cf. ci-dessous 14.4). Les extensions s'appliquèrent ensuite aux fonctions : tout polynôme est une certaine série entière, et toute série entière, une certaine "fonction", aux divers sens que les XVIII^{e} et XIX^{e} siècles donnèrent à ce mot. Aujourd'hui toute fonction -localement intégrable- est une certaine distribution [38]. De même, toute matrice triangulaire est une certaine matrice diagonale (converse évidemment fausse). Dans un autre registre, tout espace euclidien (ou préhilbertien réel) est un certain espace normé, la norme provenant alors d'un produit scalaire ; d'un autre côté, tout espace normé est lui-même un certain espace métrique, et tout espace métrique un certain espace topologique. On observe ainsi un système relativement raffiné d'inclusions des champs, qui sont chaque fois strictes : toute série entière est en effet une certaine fonction, mais il est des fonctions qui ne sont pas des séries entières. S'y ajoute un jeu complexe de ramifications : tout polynôme est une certaine série entière comme on l'a déjà observé, mais tout polynôme est aussi une certaine fraction rationnelle : le champ des fractions rationnelles et celui des séries entières sont cependant incomparables pour l'inclusion [39]. Quoiqu'il en soit, chaque extension de champs véhicule ainsi la possibilité d'instaurer, à propos d'une Lettre, un coiffement.

14.3.2 Clés opératoires et ponts.

Ce schéma objectal bien simple commence à s'animer lorsqu'en un temps second, on l'élargit analogiquement aux interprétations *opératoires*, c'est-à-dire celles des assembleurs présents dans une Forme renseignée, selon ce que nous appellerons cette fois une Clé opératoire. Nous en avions déjà observé plus haut le mécanisme, dans les exemples du Point et du Blanc exponentiel et des Formes :

$$(r.s) \qquad\qquad a^{r},$$

Nous reprenons ici ce même schéma, présenté sous forme plus abstraite, en nous limitant néanmoins, pour faire bref, au seul cas de Formes de niveau un, avec d'abord cette incontestable conclusion :

---

[37] On étendra naturellement la définition d'un coiffement au cas où plusieurs Lettres étant présentes dans une Forme, chacune est l'objet d'un coiffement qui lui est propre: on définira alors le *coiffement de la Forme.*

[38] Les distributions, généralisation des fonctions, chez Laurent Schwartz. Cf. ci-dessous en 14.5 notre cinquième exemple.

[39] Il est des séries entières qui ne sont pas des fractions rationnelles, et des fractions rationnelles qui ne sont pas des séries entières.

pour que l'interprétation d'une Forme élémentaire soit possible, il faut que l'interprétation de l'assembleur comme instruction opératoire s'*accorde* avec la Clé des Lettres qui y figurent. Ainsi, dans la Forme :

$$3 + 5$$

la Croix sera-t-elle interprétée comme somme d'entiers. Dans l'exemple :

$$\frac{5}{3} + \frac{2}{7}$$

la Croix sera par contre spontanément interprétée comme somme de rationnels, à l'aide de la règle d'addition des fractions. ($\frac{m}{n} + \frac{p}{q} = \frac{m.q + p.n}{n.q}$). Dans chaque cas, on a ainsi renseigné la Forme à l'aide d'une Clé objectale et d'une Clé opératoire adaptée, l'ensemble de ces deux Clés constituant pour la Forme considérée ce que nous appellerons une *double Clé.* Dans ces conditions donc, à propos de la forme (r + s), on peut, en première analyse, proposer deux doubles Clés : la Clé originaire stipulera que r et s sont les signes de certains entiers indéterminés, et la Croix, la somme d'entiers. La Clé neuve déclarera de son côté que r et s sont les signes de certains rationnels indéterminés et la Croix, la somme de rationnels. Comme on voit, notre analyse reproduit celle proposée en 14.1, la Croix remplaçant ici le Point. De façon générale, il est donc clair que si la Clé objectale neuve réalise une extension de champs, alors, pour que pour la seconde double Clé conduise à une interprétation, la Clé opératoire neuve choisie devra porter, de façon naturelle, sur cette extension. La Clé opératoire neuve sera dite alors *corrélative* de l'extension objectale.

Revenons à l'exemple de la Forme (r + s), pourvue de ses deux doubles Clés, la Clé opératoire neuve étant corrélative de l'extension objectale. La Forme peut néanmoins être parfois renseignée de deux façons distinctes : soit en y stipulant que r et s sont des signes d'entiers et la Croix, la somme d'entiers; soit que r et s sont des signes d'entiers considérés comme des rationnels et la Croix, la somme de rationnels. En conséquence, il se pourrait que la substance de l'objet de (r + s) soit différente, selon l'une ou l'autre double Clé. De façon générale, la Clé opératoire, pourtant corrélative du coiffement, peut ne pas être*compatible* avec celui-ci. Dans notre modeste exemple, il n'en est cependant rien car, si m et n sont des signes d'entiers, on a selon la règle d'addition des fractions :

$$\frac{m}{1} + \frac{n}{1} = \frac{m.1 + n.1}{1.1} = \frac{m+n}{1}$$

Et la substance de la Forme (r + s) est ainsi la même quelle que soit la Clé. Alors qu'on avait initialement exigé d'elle qu'elle soit seulement corrélative de l'extension de champs objectaux, des entiers vers les rationnels, l'interprétation de la Croix comme somme de rationnels s'est donc montrée compatible avec lui ; on dira aussi qu'elle *respecte* le coiffement et sera alors appelée un *pont*, le terme étant pris dans l'acception médicale ou chimique d'une liaison obtenue par la construction d'une superstructure neuve. En jetant en effet par dessus les significations préalablement constituées au moyen de l'extension de clés objectales, un pont opératoire qui les relie, la Clé vient rendre définitivement solidaires toutes les interprétations, tant objectales qu'opératoires, tant neuves qu'anciennes, celles-ci étant désormais partie intégrantes de celles-là. En d'autres termes encore, un pont vient parachever une extension de champs complète, objectale et opératoire, relativement à une même Forme élémentaire dont le combinatoire n'a, quant à lui, pas changé.

On observera d'abord qu'il est des situations où les Clés opératoires, bien que corrélatives d'un coiffement, ne sont pas compatibles avec lui. En second lieu, que si l'on dispose effectivement d'un pont valide, on est finalement en présence de deux doubles Clés, l'une originaire et l'autre neuve, chacune d'elles constituée d'un couple d'interprétations, objectale et opératoire, de sorte qu'une Forme comme (r + s) admet la même substance au regard de l'une ou l'autre des deux Clés, et qu'il n'est donc pas nécessaire de préciser de laquelle il s'agit, tant du moins qu'on ne s'intéresse qu'à la substance, les procédures en effet étant par nature distinctes. Dans notre exemple -tout comme celui de la Forme (r.s)-, où l'assembleur a été interprété comme somme (ou produit) d'entiers ou de rationnels selon le cas, le pont, c'est-à-dire la Clé opératoire nouvelle, aura été spontanément fourni à l'analyste par l'exemple même : la somme de fractions, une opération préalablement bien connue du géomètre et de la communauté mathématique, et qui n'était nullement à définir, c'est-à-dire à inventer. Dans ces deux modestes exemples, notre démarche peut donc se résumer à la simple constatation que la théorie a produit un couple non ambigu d'interprétations sur une même Forme. Il en a par contre été tout autrement dans les deux exemples exponentiels où nous avons affronté le cas, usuel et crucial, où le pont n'étant nullement donné, son invention a précisément constitué tout l'enjeu épistémologique.

14.3.3 Prolongements sur une Forme coiffée.

Nous dégageons ici plus abstraitement les éléments constitutifs de la question, en nous donnant une Forme élémentaire

$P * Q$,

où P et Q sont des Lettres, et l'Etoile, un assembleur. La Forme est d'abord supposée intégralement interprétée selon une double Clé originaire, à la fois objectale et opératoire, cas bien usuel d'une Forme insérée dans le calcul, à un moment historique donné. Les objets de deux Lettres possèdent ainsi une certaine substance, spécifiée à l'intérieur d'un champ originaire. Vient alors un coiffement portant sur les deux
340 Lettres. Sous ces seules hypothèses, la même Forme est alors sans objet possible, puisqu'on ne dispose pas naturellement d'une interprétation opératoire corrélative de l'Etoile. Celle-ci était en effet habilitée à prendre

en compte les Lettres tant qu'elles étaient interprétées selon la Clé objectale originaire. Dès lors qu'elles le sont suivant la Clé neuve, il n'y a plus de possibilité de *dérouler* la procédure, donc d'obtenir une substance pour la Forme. On pourra ici dire que celle-ci est sans signification selon la double Clé neuve, à condition d'ajouter que cette absence revêt toujours ici cette modalité spécifique : ces Formes sans objet sont de ce modèle particulier où seule manque une interprétation corrélative de l'assembleur. Un point crucial rarement souligné à notre connaissance, à la notable exception de Frege [40]:

> " Tant que l'arithmétique a pour objet les seuls nombres entiers, les letres "a", "b" figurant dans "a+b" ne peuvent indiquer que des nombres entiers, et il suffit de définir l'emploi du signe *plus* placé entre des nombres entiers. Mais toute extension du cercle des objets auxquels sont assignés "a" et "b" rend nécessaire une nouvelle définition du signe *plus.* Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de dénotation, à ce qu'on ne puisse jamais calculer sans y prendre garde sur des signes vides tout en croyant opérer sur des objets, c'est là ce qu'exige la rigueur scientifique...".[41]

La même question revient alors : est-il possible, dans le cadre d'un pont, de fournir un objet à la Forme? En d'autres termes, peut-on définir pour l'Etoile une Clé opératoire neuve, qui soit non seulement corrélative, mais encore compatible avec le coiffement objectal et la double Clé initiale? Si l'on y parvient, on disposera alors, relativement à la Forme, d'une double Clé d'extension, à la fois objectale et opératoire, qui permettra de l'interpréter dans un cadre élargi. Ainsi aura-t-on, en cas de succès, donné un objet à une Forme qui n'en avait pas. On dira qu'on a procédé à un *prolongement* [42] sur la Forme P * Q.

---

40 *Funktion und Begriff,* Iéna, 1891. Nous utilisons la traduction française de C. IMBERT, sous le titre *Fonction et concept,* in FREGE, G, *Ecrits logiques et philosophiques.* Traduction et introduction de Claude Imbert. Seuil. Paris. 1971, 92-93.

41 Un texte particulièrement important, où nous soulignons une différence importante entre ce que Frege désigne comme la "rigueur scientifique" et ce que nous avons tenté ici de décrire comme une certaine pratique de l'invention mathématique depuis Leibniz. "Veiller à ce qu'aucune expression ne puisse être dépourvue de dénotation" ("aucune Forme ne soit dépourvue de substance" dans notre terminologie) n'est pas en effet au sens strict la pratique des mathématiciens, contrairement à ce qu'écrit Frege, qui se pose ici en champion de la rigueur. Dans l'invention en effet, c'est tout au contraire primitivement en manipulant des Formes sans objet -combinatoirement obtenues- qu'on invente. Tout l'effort du mathématicien visera ensuite, s'il se peut, à fournir une signification. Ce que nous nous sommes efforcés de montrer dans ce chapitre et les précédents. Nous pourrions néanmoins nous retrouver d'accord avec Frege, à condition évidemment de redéfinir le terme "veiller".

42 Pour faire bref, nous conserverons dans la suite cette expression inexacte. Elle laisserait en effet croire qu'un prolongement, s'il est possible, ne dépend que de la Forme, c'est-à-dire du combinatoire. Or la réalisation d'un prolongement est autant liée au combinatoire qu'au signifiant. Pour pouvoir éventuellement construire un prolongement, il faut en effet, outre la donnée d'une Forme, celle d'une Clé originaire et d'un recouvrement objectal, donc en définitive, d'une Forme coiffée.

Pour construire un pont, le géomètre utilise alors une méthodologie invariable, que nous dirons, au sens propre "canonique" : comme dans les deux exemples exponentiels, il se met à la recherche d'un canon, ou d'une famille de canons, tels que, d'une part sur le plan combinatoire, la Forme considérée soit une constituante de la propositionnelle de chaque canon -c'est-à-dire qu'elle y figure intégralement- et que d'autre part, sur le plan des significations, ces canons soient valides au regard de la double Clé originaire. Ces canons, dont le choix est contingent, seront dit *électifs.* Le procédé consiste alors à réexaminer les Formes électives, cette fois au regard du coiffement, et à *définir*, si c'est possible, la Clé manquante, c'est-à-dire le pont, de sorte que les canons demeurent encore valides selon la double Clé neuve. Comme on l'a remarqué, le procédé se résume à apporter, si c'est possible, une signification nouvelle à l'assembleur, telle qu'elle continue d'assurer la validité des canons au-delà et en dehors des champs originaires. En gros, on espère pouvoir retrouver chaque fois, comme pour nos deux exemples exponentiels, cette bien agréable situation d'une "équation épistémologique à une inconnue" où tout est fixé, à l'exception d'une "bonne" signification pour l'assembleur. Si la canonique réussit, le prolongement revêt alors quelques unes des apparences d'un miracle : d'une part, on a fourni un objet à des Forme comme :

$2^{\frac{3}{2}}$, $a^{\sqrt{2}}$, a^x, $\sqrt{-1}$, $a^{\sqrt{-1}}$ qui n'avaient pas de signification ; d'autre part, on a prolongé *extra muros* le champ de validité d'une formule.

Dépendant des canons électifs, il se peut que la canonique ne conduise à rien, c'est-à-dire à aucune définition possible d'une Clé opératoire d'extension qui soit en même temps compatible. Ce cas se présente lorsque les contraintes résultant de l'observance des canons choisis sont trop fortes. Il se peut au contraire, comme dans l'exemple de l'*Epistola Prior*, ou des nombres complexes (Cf. ci-dessous 14.4), que la méthode définisse exactement une Clé opératoire extensive compatible. Les canons seront alors dit *décisifs* et le prolongement sera déterminé (il restera néanmoins à verifier le caractère suffisant des conditions nécessaires trouvées). Dans ce cas, le choix des canons électifs aura pu être suffisamment adroit pour que le schéma détermine exactement ce qu'on recherche, c'est-à-dire un pont. Il se peut aussi que le choix fait pour la famille des canons soit insuffisant pour assigner au pont une définition unique. Le prolongement est dit sous-déterminé, ou essentiellement indéterminé.

Revenons au cas d'une Forme élémentaire pour constater qu'un prolongement sur celle-ci est en définitive constitué par un couple de deux doubles Clés, à son propos (objectale, opératoire), réalisant à la fois une extension objectale (le coiffement) et une extension opératoire corrélative et compatible (le pont). Un prolongement organise
342 ainsi un couple de significations sur une même Forme : car c'est bien la signification qui se prolonge et se ramifie et non le combinatoire. Sur le plan de l'invention mathématique, le schéma du prolongement est ainsi

l'exact opposé épistémologique de celui des jeux de métamorphoses, où c'est le combinatoire qui est modifié, cependant qu'en l'absence d'extension des champs, les Clés d'interprétation demeurent en principe inchangées. Quoiqu'il en soit, ainsi soumise à un prolongement, une même Forme pourra être interprétée de deux façons, à la fois distinctes et compatibles, c'est-à-dire telles que leur conjonction ne créera pas d'ambiguïté.

Tout prolongement réussi induira aussi une dialectique de *bifurcation*. Une question vaste et intéressante que nous ne ferons qu'évoquer ici brièvement. Il convient d'abord de souligner que, renseignée selon la double Clé originaire, la Forme vérifiait évidemment des canons autres que les électifs. Toute élection de certains canons conduit en effet en même temps au délaissement de certains autres. Or, s'il est bien clair que, par définition, les canons électifs seront valides au regard de la double Clé neuve, les canons *laissés-pour-compte,* valides pour la double Clé originaire, pourront, quant à eux, ne pas l'être pour la Clé neuve, et auront ainsi été perdus dans le prolongement. Dans ces conditions donc, tel canon ou formule *interprétant une même Forme* sera vrai au sens de la Clé originaire et non au sens de la Clé neuve. Ainsi, la proposition

$$e^{x} > 0$$

valide pour tout nombre réel de signe x, est-elle perdue dans le prolongement eulérien par lequel x est interprété comme un nombre complexe (cf. 14.5 ci-dessous. Deuxième exemple). En sens inverse, certaines des propriétés désormais vraies au regard de la double Clé neuve, étaient fausses dans le cadre originaire : ainsi de l'équation algébrique fondatrice $x^2 + 1 = 0$ qui admet (évidemment !) des solutions dans le champ des nombres complexes, mais non pas de celui des nombres réels [43]. Ainsi observe-t-on la genèse spontanée dans le discours de cette dialectique de bifurcation, aujourd'hui fréquemment rencontrée dans des domaines mathématiques divers : telle équation algébrique de Forme donnée admet des solutions au sens des nombres complexes, et non pas des des nombres réels, telle propriété de la dérivation est valide au sens des distributions ou bien, "seulement", à celui des fonctions (cf. ci-dessous 14.5. Cinquieme exemple), telle propriété des entiers vaut au sens standard, ou bien non standard.

14.3.4 Prolongements : principe et méthodologie.

La procédure de prolongement est ainsi un schéma épistémologique, un des méta-procédés de l'invention mathématique. En vérité inscrite dans les perspectives un peu vagues ouvertes ci-dessus par de Morgan, elle peut se caractériser à la fois par son "principe" et sa

43 De la même façon, l'équation $e^{x} = -2$ admet des solutions au sens des nombres complexes et non pas des nombres réels.

méthodologie. La méthodologie se décrit à l'évidence par ce que nous avons plus haut appelé le choix de canons électifs et la procédure canonique. Quant à l'énoncé du "principe", tel qu'on peut le dégager, en première analyse, des divers exemples de ce chapitre, tant ceux déjà décrits qu'à venir (cf. 14.4 et 14.5), il pourrait être bien simplement le suivant : "tout objet, tout canon mathématique, apparemment en soi, peut le cas échéant être regardé comme une instance seulement d'un objet ou un canon plus vaste qui le recouvre et le prolonge sur le plan signifiant, cependant que sa Forme en reste inchangée. "

Permettant d'envisager la création d'objets neufs et de canons élargis, ce "principe" est ainsi une modalité gouvernant une part de l'invention mathématique. Il se rencontre en vérité dans un grand nombre d'applications, tant dans l'histoire que la pratique contemporaine ; parmi un vaste lot d'exemples possibles, nous en avons choisi quelques uns, particulièrement significatifs, ci-dessous développés en 14.5. L'importance de la fréquence d'apparition du schéma s'explique aisément, eu égard au caractère véritablement banal de la situation initiale : une Forme d'une part, des extensions objectales sur elle d'autre part, c'est-à-dire la matière mathématique ordinaire, tant symbolique que signifiante. Ainsi, pour le géomètre, envisager un prolongement à propos de la Forme est une démarche première naturelle, presque spontanée, avant même de procéder à des essais effectifs, et sans être évidemment jamais garanti, ni de la simplicité des solutions, ni même de leur existence. On pourrait cependant s'étonner de ce qu'un schéma à nos yeux aussi usuel n'ait pas été explicitement dégagé (et dénommé) par les mathématiciens, comme émergeant d'une méthode commune à des exemples divers. En guise de réponse, on ne pourra que regretter encore une fois la répugnance de la communauté à constituer explicitement les principes épistémologiques généraux de son action, même s'ils sont actifs et véritables. La présence opératoire sous-jacente du schéma peut néanmoins parfois se repérer dans le texte au terme véritablement très vague de "généralisation" (l'exponentielle newtonienne est une généralisation de la cartésienne), mais le mot est le plus souvent employé sans précision aucune (qu'est ce qui est généralisé ? et comment ?) et aussi dans d'autres acceptions, sans rapport avec le schéma.

On terminera notre chapitre par deux sections, la première étant consacrée à l'élaboration moderne du concept de nombre complexe. Dans le droit-fil des exemples exponentiels, elle s'offre néanmoins avec un raffinement (changement de cadres) qui en fait un objet épistémologique particulièrement intéressant que nous examinerons dans le détail. La dernière section viendra enfin brièvement présenter -sans démonstration- des exemples divers de prolongements appliqués.

14.4 La construction du corps des nombres complexes.

14.4.1 De Bombelli à Leibniz.

Cette section est consacrée à l'analyse épistémologique de la construction moderne du corps des nombres complexes, dans la perspective du schéma de prolongement. Une élaboration qui a d'autant plus d'intérêt qu'elle est (tardivement !) venue régler en droit l'ancienne question ontologique des "quantités imaginaires" soulevée par Bombelli à la fin du XVI^e^ siècle. Or, si les polémiques "imaginaires" des XVII^e^ et XVIII^e^ siècles continuent souvent, aujourd'hui encore, de rencontrer un écho, il ne nous semble pas que l'analyse épistémologique contemporaine se soit grandement sentie concernée par cette question. Les démonstrations y sont cependant simples et usuelles. Il nous semble seulement qu'il y manque un commentaire. De nôtre côté, nous aurions sans doute pu, dans cette thèse, tout aussi bien énoncer un "principe de prolongement" à partir des "imaginaires" et de la Forme $\sqrt{-1}$, initialement sans signification; leur introduction, épistémologiquement capitale, a en effet précédé celle des exponentielles avec leurs Formes $a^{\frac{p}{q}}$ et a^z, supports de notre exposé. Et il nous semble aussi très clair que l'élaboration, par Newton et Leibniz, de leurs diverses exponentielles s'est inspirée du modèle épistémologique "imaginaire", Descartes s'étant évidemment tenu à l'écart de toute cette méthodologie. Dans le cadre de la présente thèse, nous avons cependant préféré mettre en avant les exponentielles, dont les développements, comme on a vu, furent très considérables au XVIII^e^ siècle, contrairement aux "imaginaires". L'analyse des conceptions "imaginaires" des géomètres du XVII^e^ siècle, et particulièrement de Leibniz aurait d'autre part demandé un traitement historique détaillé que nous n'aurions pu développer que très partiellement dans le présent cadre, nous réservant pour une publication ultérieure.

Historiquement, la question trouve sa source dans la pertinente analyse critique par Bombelli du cas "irréductible" de la résolution des équations cubiques par Del Ferro-Tartaglia-Cardan, exposée dans l'*Ars Magna* de 1545. Opérant sur des exemples d'équations déjà résolues, c'est-à-dire décomposées, Bombelli, avait naturellement tâché de faire jouer, à l'effet de les éprouver, les comptines rhétoriques de résolution de Cardan. Il s'aperçut alors de ce fait surprenant : dans ces cas, structurellement les plus simples, ceux où l'emploi de la méthode de Cardan aurait du être le plus naturel, elle ne fonctionnait qu'à condition d'admettre l'existence de fictions, et en premier lieu, celle d'une "quantité dont le carré serait égal à moins un". Par exemple, pour continuer d'appliquer la règle de Cardan-Tartaglia à l'équation du troisième degré, écrite sous la forme :

$$x^3 - 3.x = 0$$

en termes anachroniques et dont les solutions, qui sont en évidence, ont pour valeurs 0, $\sqrt{3}$ et - $\sqrt{3}$, la méthode conduisait à l'équation auxiliaire [44]:

$$t^2 = -1$$

Cette forme de contradiction méthodologique entre le caractère organiquement simple des exemples et la nécessité, dans ces cas et dans ces cas seulement, d'y recourir à des fictions, sera pertinemment relevée par Leibniz dans une lettre à Huygens [45]. Aucun carré cependant ne saurait être négatif et il s'agit bien d'une fiction qui, de surcroît, et selon Bombelli lui-même, devait être manipulée : toujours avec l'objectif de retrouver les solutions réelles, prescrites par avance, il fallait en effet que ces fictions vérifient "les relations ordinaires de l'algèbre", une condition que nous examinons ci-dessous plus en détail. A l'effet de reconstruire les solutions réelles d'un problème réel, Bombelli en vint ainsi, dans son *Algebra* de 1572, à produire et gérer un système de fictions, dont nous avons ailleurs détaillé l'étude [46]. Une création de Bombelli qui demeure aujourd'hui la première des procédures absolument non constructives de l'histoire des mathématiques. A l'endroit de ses "radicaux sur du négatif" ainsi introduits, Bombelli n'emploie cependant jamais le terme d' "imaginaire" et son écriture sur ce point, avec ses "piu di meno", et "meno di meno", respecta strictement le cadre rhétorique des géomètres du XVI^e^ siècle. Après Viète et Descartes cependant, la même question fut naturellement reprise, avec les moyens de la nouvelle écriture symbolique, par Leibniz et Wallis [47] en particulier. Après Albert Girard, Wallis et Newton, Leibniz fut ainsi l'un des premiers géomètres à *écrire* la Forme [48] :

$$\sqrt{-1}$$

---

44 Ici, pour résoudre $x^3 = 3x$, la méthode fait poser $x = u + v$, donc $(u + v)^3 = p\,(u + v)$, qui conduit, d'une part à $u^3 + v^3 = 0$, d'autre part à $3.u.v\,(u + v) = 3$, soit $u.v = 1$ et $u^3 \cdot v^3 = 1$. Les quantités de signes u^3 et v^3 sont donc solutions de l'équation du second degré (*résolvante*) : $t^2 = -1$. Evidemment rédigés en écriture rhétorique, tous les exemples de Bombelli dans l'*Algebra* sont structurellement analogues à celui-ci. Nous avons complètement détaillé la méthode dans *Le secret et la Règle*, op. cit.

45 *Bw*, 547 - 550. op. cit. A la lettre écrite peu de temps après le départ de Paris, Leibniz avait joint un exemplaire de l'*Algebra* de Bombelli. Elle contient aussi un important supplément détaillé traitant de cette question : *De resolutionibus Aequationum Cubicarum triradicalium de Radicibus realibus quae interventu imaginarium exprimuntur,deque sexta quadam operatione arithmetica.*

Leibniz fut en effet le premier à remarquer que, s'agissant de la règle de Cardan, l'emploi des imaginaires n'est nécessaire que dans la seule situation évoquée (*i.e*, en termes modernes l'équation admet trois racines réelles). Plein d'enthousiasme, Leibniz affirme même à Huygens avoir démontré que
346 jamais on ne pourra se dispenser des imaginaires ! Huygens, plein de sagesse, répond que "la preuve de ces négatives est difficile" (page 565). Démontrer en effet qu'on ne peut pas éviter est une opération bien délicate et le jeune Leibniz présume ici de ses forces.

46 Le secret et la Règle, op. cit.

47 WALLIS J, *Treatise of Algebra*. Londres. 1685, page 266.

48 Dès la lettre à Huygens et le *Triradicalium*... (cf. note *supra*)

qui, dûment complétée, fournit : $\sqrt{(-1)}$. Depuis Bombelli la situation n'avait évidemment pas changé pour autant : le carré de *tout* nombre réel étant en effet positif ou nul, la Forme :

$$\sqrt{q}$$

n'admet de substance que si et seulement si q est le signe d'un nombre positif ou nul. En conséquence, l'assembleur à une place étant interprété usuellement par l'extraction de racine, la Forme *supra*, ordinairement renseignée, est sans substance, et donc sans signification. Et, comme dans tous les exemples de ce chapitre, c'est bien l'absence de signification de l'assembleur (le Vée) qui est en cause et non celle de la Forme intérieure (- 1). Fortement aiguillonnés cependant par les nécessités propres aux équations algébriques, les géomètres du XVII^{e} siècle retournèrent à cette question insistante : comment fournir une signification à une Forme qui n'en avait pas? On pouvait croire obtenir une réponse, ici encore, par le choix d'un canon électif, ce dernier ne pouvant être que

$$(\sqrt{q}).(\sqrt{q}) = q \qquad (1)$$

où la double Clé était usuelle : la Lettre q était le signe d'un nombre, positif ou nul, le Vée interprété par extraction de racine et le Point comme la multiplication de nombres réels. Pour pouvoir continuer, il fallait donc impérativement envisager cette extension de Clé objectale par laquelle q serait interprété comme un nombre quelconque, positif ou négatif. Dans ces conditions donc, le pont, s'il avait été possible, se serait résumé, comme dans les exemples exponentiels, à fournir une Clé opératoire extensive et compatible pour le Point. On retrouve bien ici dans son intégralité la situation de prolongement, à cette réserve majeure près que, dans ce cas "imaginaire", et contrairement aux précédents exponentiels, aucune extension compatible de Clé opératoire pour le Point ne put être proposée aux XVII^{e} et XVIII^{e} siècles. En d'autres termes, on ne put apporter de substance à la Forme $\sqrt{-1}$ telle que soit vérifiée la relation naturelle :

$$(\sqrt{-1})^{2} = -1$$

De surcroît, il fut clair dès le début (1572) que la satisfaction de cette relation fondatrice, à supposer qu'elle eut été obtenue, n'aurait pas été suffisante. La méthode conduisait en effet à ajouter sur-le-champ ces deux nouveaux canons électifs :

$$(a + b.\sqrt{q}) + (c + d.\sqrt{q}) = (a + c) + (b + d).\sqrt{q}$$

$$(a + b.\sqrt{q}).(c + d.\sqrt{q}) = a.c + q.b.d + (a.d + b.c)\sqrt{q}$$

347

évidemment valides si la Lettre q est le signe d'un nombre positif ou nul, mais dont, en vue des nécessités cubiques, il fallait qu'ils devinssent extensivement satisfaits dans le cas où q est le signe d'un nombre négatif, en sorte que soient vérifiées "les règles ordinaires de l'algèbre" rituellement invoquées par Bombelli et Leibniz, c'est-à-dire les deux formules (2) et (3), additive et multiplicative, ci-dessous :

$$(a + b.\sqrt{-1}) + (c + d.\sqrt{-1}) = (a + c) + (b + d).\sqrt{-1} \quad (2)$$

et :

$$(a + b.\sqrt{-1}).(c + d.\sqrt{-1}) = a.c - b.d + (a.d + b.c) \sqrt{-1} \quad (3)$$

où a et b sont, en termes modernes, les signes de nombres réels. Il est indispensable d'observer d'abord que ces Formes contiennent un certain nombre d'assembleurs aux statuts existentiels différents. Dans le canon (3) par exemple, Point et Croix ont à l'évidence une signification dans
$(a.d + b.c)$, comme produit et somme de nombres réels, mais n'en ont aucune dans $(a + b.\sqrt{-1})$, non plus que la Croix centrale dans la Forme :
$(a + b.\sqrt{-1}) + (c + d.\sqrt{-1})$, ni le Point central dans :
$(a + b.\sqrt{-1}).(c + d.\sqrt{-1})$.

L'absence de pont et de prolongement constitua ici un échec historique durable et regrettable, à la mesure des développements de la théorie des équations algébriques, qui se faisaient pressants pour continuer de manipuler des "quantités imaginaires" dans la résolution de problèmes réels. Placés entre un souci d'efficacité et le respect d'un minimum ontologique, les mathématiciens des XVIIe et le XVIIIe siècles, de Descartes [49] à Condillac [50] -ceci a donné lieu à un abondant commentaire- se partagèrent alors, à l'exacte mesure de leur ontologie, entre le rejet pur et simple des "quantités imaginaires" et une acceptation aveugle de leur emploi qui mettait entre parenthèses la question de leur substance. Cette dernière position fut celle de Leibniz, avec cet objectif supplémentaire avoué de mettre à l'oeuvre le paradigme des "quantités imaginaires" dans la création de ses infinitésimales [51]. Au début du XIXe siècle cependant, une ébauche de dénouement de la contradiction, de

---

49 Descartes, on l'imagine, ne voulut jamais prendre en compte l'existence de prétendues "quantités imaginaires" dépourvues de toute construction géométrique. Sur les positions cartésiennes, cf. le Père Costabel : "Il me paraît donc que si Descartes a fini par concevoir que $x^2 + 1 = 0$ "explique" x aussi bien que que $x = \sqrt{-1}$, il n'en a pas pour autant accepté cette figure. Il est resté dans la ligne de Stevin, sans adopter la position d'Albert Girard". P. Costabel : *L'actualité scientifique au temps des Regulae*, in *Démarches originales de Descartes savant*. Vrin Reprise. Paris 1982, p 44.

50 Par exemple : "Des expressions comme $\sqrt{-2}$ ne réfèrent pas, comme on le croit, à des quantités imaginaires, ce sont des expressions imaginaires, "parce que, dans le vrai, elles ne signifient rien." (Condillac : *Logique* 6, II, XIV), in : Condillac, La langue des Calculs, édition critique par Sylvain Auroux et Anne-Marie Chouillet. Presses Universitaires de Lille. 1981, p XXII.

51 Sur ce point, Leibniz soutint souvent la primauté de l'utile sur l'existant (en l'occurrence, le constructible) : "Si de telles quantités (sq. les imaginaires) n'étaient pas données dans le calcul il serait impossible d'instituer des calculs généraux c'est-à-dire de trouver des valeurs communes aux possibles et
 aux impossibles, qui ne diffèrent que par l'explication des lettres." (M.S, VII, 74-75); cf. sur ce point BELAVAL Y, *Leibniz, critique de Descartes*, Gallimard. Paris 1960, 263.
Et aussi: "Les infinitésimales se distinguent également des quantités réelles et sont tout à fait comparables aux imaginaires "(cf. BELAVAL, op. cit., 264).

forme géométrique, presque uniquement visuelle, fut proposée, particulièrement par Argand[52], Gauss[53], et Cauchy. Les "quantités imaginaires" de Leibniz et Euler se muèrent alors en "nombres complexes" et la question de l'existence de fait des nombres complexes ne fut plus mise en doute par la communauté des mathématiciens. Ils ne furent dès lors plus cantonnés dans ce rôle un peu extravagant de fiction auxiliaire et indispensable à la résolution des équations algébriques que la tradition leur avait assigné depuis le XVI^{e} siècle; alors fut possible la création par Gauss [54] de la théorie des fonctions de variable complexe, d'une considérable importance. Quoiqu'il en fût cependant du caractère apaisant de ces "explications géométriques" des nombres complexes apportées vers les années 1800, on conclura rétrospectivement aujourd'hui qu'en vérité, tout au long du XIX^{e} siècle, leur nature véritable sera restée problématique.

14.4.2 Déplacements et changements de cadres.

Une solution authentique et définitive à la question ne fut en vérité apportée qu'au début de notre siècle, à nouveau dans le cadre de la théorie des ensembles, par l'utilisation de couples de nombres réels. Nous présentons donc ici une analyse épistémologique de la démarche qui conduit à l'exposé des résultats modernes, tels qu'on peut aujourd'hui les enseigner aux étudiants[55]. La méthodologie, celle d'un changement de cadres[56], comporte deux temps: déplacement et identification, qui ne se résument qu'approximativement en analyse et synthèse. En premier lieu, on procède à un déplacement[57] du problème de pont posé, qui le transpose dans un cadre autre, qu'on pourra appeler son espace de représentation (mathématique). Dans ce cadre nouveau, et par le choix d'un canon électif décisif, le prolongement admet exactement une réalisation. Dans un temps second, au moyen d'une identification entre

---

52 ARGAND J-R, *Essai sur une manière de représenter les quantités imaginaires dans les constructions géométriques* (1806) in *Annales de mathématiques pures et appliquées*, de Gergonne, **4**, (1813-1814) et **5**, (1814- 1815). Ces deux volumes contiennent de nombreux articles d'Argand et de ses contemporains sur la question de la représentation géométrique des nombres complexes.

53 Gauss utilisera d'abord les nombres complexes dans ses versions successives (1799, 1815 et 1816) de sa démonstration du "théorème fondamental de l'algèbre." On notera aussi une lettre à Bessel de 1811 (Oeuvres, **8**, 90- 92), plus explicite sur la représentation des nombres complexes.

54 Aux dires de Gauss lui-même, cette création fut destinée à fournir une signification à la Forme $\int^{a+b\sqrt{-1}} \phi(x)\,dx$ qui n'en avait pas (la borne supérieure est en effet un imaginaire). Cf KLINE, *Mathematical Thoughts from Ancient to Modern Times.* Oxford University Press. New York. 1972, 632.

55 On prendra pour exemple le Chapitre V (Nombres complexes, pages 127-163), dans le *Traité de Mathématiques Spéciales*, de CAGNAC G, RAMIS E, COMMEAU J. Tome 1. (Algèbre). Masson. Paris. 1970. Un manuel qui fut une référence pour toute une génération de mathématiciens.

56 Un terme aujourd'hui usuel en didactique des mathématiques. Sur ce point, on pourra consulter DOUADY, A et R, *Changements de cadres à partir de Surfaces Minimales,* Cahier de DIDIREM, 23 1, publication de l'IREM de l'Université Paris VII. Mars 1994.

57 On a eu quelque scrupule à employer ici le terme d'isomorphisme, qui vient pourtant à l'esprit. A ce moment de cet exposé de la démarche de recherche, les "quantités imaginaires" ne sont toujours en effet que des fictions.

nombres réels et certains couples de nombres, on fait retour sur cette forme de codage qu'aura constitué le déplacement. Dans cette section, nous analyserons la première partie (déplacement).

La question se résume donc à tâcher de fournir une substance aux Formes :

$$\sqrt{-1} \text{ et } a + b . \sqrt{-1}$$

On s'intéressera d'abord à la seconde, pour laquelle la réflexion initiale est celle-ci : alors même que la "quantité imaginaire" représentée par $a + b . \sqrt{-1}$ n'est pas définie, celle de signe $\sqrt{-1}$, demeure, partout dans la Forme, présente et identique à elle même; seule suffirait donc à la détermination de $a + b . \sqrt{-1}$ la donnée des deux nombres de signes a et b. Ainsi effectue-t-on l'abstraction de l'essence de la quantité inconnue par une représentation qui ne fasse intervenir que ces deux nombres. On fait alors ici usage, d'une part de l'ensemble IR des nombres réels, en une construction due à Cantor et Dedekind, d'autre part du couple de réels de signe (a, b) enfin de la constitution de l'ensemble -dénoté IR x IR ou encore IR ^{2}- de *tous les couples* de nombres réels [58]. C'est ce dernier ensemble qui va servir de support à la construction. En première analyse donc, le couple, de signe (a, b) sera la *représentation* de la "quantité imaginaire" à définir, avec pour Forme $a + b . \sqrt{-1}$, à propos de laquelle on observe bien simplement ceci : dès lors qu'a été reconnue l'existence aux couples (aussi celle de l'ensemble de tous les couples), se trouve évacuée dans le signe (a, b) toute question ultérieure de signification du Point et de la Croix. Cette procédure de représentation par un couple -le coeur de la méthode- aujourd'hui si simple et si naturelle, était cependant inconcevable pour Leibniz, faute du moindre support ontologique au XVII^{e} siècle, alors même que, sur ces questions existentielles mathématiques, le philosophe de Hanovre, comme on l'a vu, n'avait guère montré d'exigences particulières. On ne saurait donc, à notre sens, surestimer l'importance, bien reconnue par Bourbaki [59], de l'axiome

---

58 L'acceptation d'un tel énoncé collectivisant (l'ensemble de tous les couples) n'est pas historiquement allée de soi. Ce fut ici une étape supplémentaire dans l'abstraction, dont on mesure les difficultés à lire les discours embarrassés de Cantor ou de Borel et leurs "ensembles de points", avec une connotation géométrique sous-jacente, qui nous paraît rétrospectivement bien inutile, faute d'arriver à ce concept d'ensemble *per se*, que produisirent leurs successeurs. Ce fut pour les mathématiciens une étape considérable -depuis lors devenue une figure transcendentale nouvelle- car elle revenait, dans la considération de ces nouvelles entités (les ensembles), à accepter de se délivrer, fût-ce imaginairement, de toute représentation explicite.

59 Cf. sur ce point le commentaire de Jean LARGEAULT, in *Logique et philosophie chez Frege*. Nauwelaerts. Louvain-Paris. 1970, page 134 : "Dans le Bourbaki "définitif", le signe du couple est une idée primitive à laquelle est attachée un axiome dit axiome du couple qui (...) énonce dans quelles circonstances deux couples sont identiques. Cependant la notion de couple peut être définie au lieu d'être postulée. Le procédé de Kuratowski-Wiener permet de la construire à partir de celle d'ensemble (...) on appellera couple des éléments x, y la classe des classes { {x }, { x, y } }. Ces couples satisfont à l'axiome du couple (Bourbaki (79), chap 2, § 2, exercice 2a). Les motifs pour lesquels on écarte cette définition pour placer le signe du couple parmi les termes primitifs du système sont des motifs de convenance pratique. "

du couple, qui a pris rang de figure transcendentale de la connaissance mathématique.

Sur l'ensemble de ces couples, qui ne sont en un temps premier que des codifications hypothétiques de quantités ontologiquement incertaines, le déplacement va alors poser les canons qui vont *représenter* les canons électifs, en commençant par les deux derniers. Autrement dit, elle va reformuler en termes de couples les propriétés électives, initialement exprimées en termes de "quantités imaginaires". Dans le canon (3) par exemple, la Forme aval

$(a.c + q.b.d) + (a.d+b.c).\sqrt{q}$ se transcrit en :

$(a.c + q.b.d, a.d + b.c)$

où le Point et la Croix naturellement interprétés comme somme et produit de nombres réels, ne demandent aucun apport supplémentaire de signification. A la Forme amont,

$(a + b. \sqrt{q})$ et $(c + d .\sqrt{q})$

se transcrivent en (a, b) et (c, d) respectivement, de sorte que l'Amont complet se transcrit en :

$(a, b). (c, d)$

où on a de nouveau utilisé le Point : un signe qui n'est cependant aucunement pourvu de signification, pas plus que ne l'était primitivement le Point central du canon (3). Dans ces conditions cependant, le canon se transcrit complètement suivant :

$(a, b). (c, d) = (a.c + q.b.d, a.d + b.c)$

où la nouvelle Forme amont contient ce qui précisément est seul ici encore à définir : l'interprétation du Point appliqué à des couples. On reconnait sur l'ensemble des couples la procédure typique de prolongement, la seule "inconnue" étant la signification apportée au Point de l'amont comme produit de couples : comme l'aval est pourvu d'objet, il est toujours possible de *choisir* à l'amont l'interprétation du Point d'une et d'une seule façon, *de sorte que* soit assurée la validité (universelle, c'est-à-dire ici pour tous les couples) du canon. Autrement dit, appliqué aux couples, le nouveau canon multiplicatif, transposé de l'électif multiplicatif et originel, est cette fois décisif. Epistémologiquement, c'est évidemment le point crucial. De même définit-on sur l'ensemble des couples une seconde autre loi, appelée *somme* de couples, dont le signe est à nouveau la Croix, au moyen de la formule additive :

$(a, b) + (c, d) = (a + c, b+ d)$

En termes modernes, on dit que les deux opérations nouvelles (produit et somme de couples) sont deux lois *internes* sur le référentiel choisi : $\mathbb{R}^2$. A partir de ces deux définitions centrales, on teste alors par le calcul l'éventuelle validité de propriétés supplémentaires "intéressantes" (commutativité, associativité, existence d'éléments neutres ou du symétrique d'un élément pour l'une ou l'autre loi, distributivités éventuelles, etc...). Rassemblant les résultats, on conclut, pour l'ensemble de tels couples muni de ses deux lois internes, à la riche structure de corps commutatif [60].

Il s'est cependant chaque fois agi de conditions seulement nécessaires, et l'on n'est pas à ce moment assuré qu'en faisant choix de deux semblables définitions sur les représentations (les couples), on parvienne rétroactivement *in fine* à la construction cherchée; en particulier rien n'a été encore dit de la satisfaction cruciale du premier canon (1); tout ce qu'on peut néanmoins affirmer à ce moment, c'est qu'au moins en ce qui concerne le changement de cadres, les deux définitions posées sont certainement indispensables. A l'effet de conclure définitivement, la méthode utilise alors une procédure d'identification que nous allons maintenant développer.

14.4.3 La procédure d'identification.

A ce moment, rien n'a été encore dit de la satisfaction du premier canon électif (1) :

$$(\sqrt{-1}) . (\sqrt{-1}) = -1$$

Tout essai naturel de tester sur les couples la validité du premier canon électif conduit alors à un échec, en raison de cette objection préalable : dans le cadre des couples et sans définition supplémentaire, il n'y a pas de rapport organique entre ($a + b . \sqrt{-1}$) et $\sqrt{-1}$. La procédure de déplacement, qui a mobilisé l'ensemble de tous les couples, pour apparement satisfaisante qu'elle soit, demeure néanmoins en quelque sorte abstraite (c'était même là un avantage essentiel que nous lui avions reconnu). La représentation par un couple, de signe (a, b) d'une hypothétique "quantité imaginaire", de signe ($a + b . \sqrt{-1}$) a certes désormais droit de cité, mais ces représentations, pas plus donc que les "quantités" elles-mêmes ne sont à ce moment reliées aux nombres réels usuels autrement que par la genèse abstraite d'un couple. C'est cette situation, de type géométrique, qui avait été en vigueur au début du XIX[e] siècle avec les représentations d'Argand, Gauss et Cauchy, sous une forme simplifiée : au lieu de couples, ils parlaient de points. Avec nos termes, nous dirions que la définition *supra* du Point comme produit de couples, bien qu'ancrée dans le choix d'un canon électif, n'est pas un pont au sens strict, faute d'avoir connu à sa source une quelconque extension objectale, nécessaire à tout prolongement.

On décidera donc de relier les nombres réels par rapport aux quantités imaginaires hypothétiques en décidant que la substance de la Forme $a + 0 . \sqrt{-1}$ sera la même que celle du nombre réel de signe a. Une convention utile, mais contingente, contrairement aux apparences -rappelons qu'aucune définition n'a encore été proposée pour le Point et la Croix de la Forme imaginaire *supra*- et constitue en réalité

60 Pour une présentation contemporaine des structures de corps (*field*) et d'anneau(*ring*), on pourra consulter VAN DER WAERDEN B.L, *Algebra*, I, Springer-Verlag. 1991, chapitre 3, *Rings and Fields*, 32- 60. (Première édition. Ungar. 1970).

une extension de champs fondatrice : tout nombre réel de signe a est ainsi désormais une certaine "quantité imaginaire" ayant pour Forme $a + 0 . \sqrt{-1}$. Transcrite par déplacement, la substance d'un nombre réel de signe a devient alors celle du couple (a,0) où la seconde composante est Zéro [61]. On est ainsi conduit à constituer l'ensemble de ces couples particuliers, dont la forme est :

$$(t,0)$$

où t est le signe d'un nombre réel quelconque [62]. Un calcul élémentaire montre alors que ces couples s'ajoutent et se multiplient entre eux -au regard des deux lois de couple plus haut introduites- exactement comme les nombres réels représentés par leurs premières composantes, en tant que nombres. Ainsi a-t-on par exemple pour le produit de tels couples :

$$(a, 0). (c, 0) = (a. c -0.0, a.0 + 0.c) = (a. c, 0)$$

Autrement dit, les deux règles de base du calcul (addition et multiplication) appliquées aux couples dont la seconde composante est Zéro sont les stricts analogues de celles des nombres représentés par leurs premières composantes [63]. Or ce dernier ensemble est celui des nombres usuels, régi par ce qu'on a appelait au XVIIe siècle les "règles ordinaires de l'algèbre", et aujourd'hui par la structure de corps commutatif : il en est donc de même de l'ensemble des couples dont la seconde composante est Zéro.

On peut alors procéder à ce moment à des dénominations et désignations : d'abord un couple quelconque sera appelé un *nombre complexe*, qui est donc la représentation d'une "quantité imaginaire". Un "nombre" nouveau est ainsi redéfini par ce qui était auparavant un couple de nombres. On désignera par C l'ensemble de tous les nombres complexes, et par C_1 celui de tous les couples dont la seconde composante est Zéro. Muni des opérations de somme et produit de couples, le triplet (C, +, .) est donc un corps commutatif, qui contient un sous-ensemble dont le comportement est exactement le même que celui du corps IR des nombres réels pour les lois usuelles. En termes modernes, on dit que C contient C_1 comme sous-corps, isomorphe [64] à IR. Le géomètre procède ensuite à cette *identification* : puisque le comportement des (a,0) est le même dans C_1 que celui des a dans IR, il est loisible de considérer qu'autant que les règles ordinaires de l'algèbre soient concernées, "il n'y a pas d'inconvénient à *confondre* les notations (a,0) et a." Nous avons reproduit ici entre des guillemets une formulation aujourd'hui usuelle

---

61 Interprété comme le nombre nul. Nous attachons ainsi le terme "composante" au registre combinatoire (et non signifiant). "couple" est par contre le nom d'une substance, du registre signifiant donc, représenté par une Forme élémentaire dont la Virgule est l'assembleur.

62 Chaque couple ainsi constitué est à l'évidence complètement déterminé par la donnée d'un nombre réel (dont le signe est sa première composante).

63 Il en résulte que *toutes* les règles de calcul dérivées seront alors analogues, tant du moins qu'elles ne feront intervenir que somme et produit.

64 Il s'agit évidemment ici d'un isomorphisme de corps (et non par exemple de structures ordonnées !).

dans les manuels d'enseignement supérieur [65]. Une procédure d'identification, qu'on découvre aujourd'hui dans nombre d'exemples structurellement analogues, et qui organise des occurences certaines d'une confusion délibérée de signes [66] à laquelle on pourrait d'ailleurs ne pas souscrire. C'est ainsi que Frege se refusera toujours à ce qu'un même symbolisme puisse recevoir deux interprétations au cours d'un même calcul [67]. Si, malgré l'autorité de la règle d'univocité et des principes supérieurs qu'elle véhicule, on fait néanmoins si souvent appel aujourd'hui à la procédure d'identification, c'est en raison d'avantages si éminents qu'ils peuvent sembler valoir pour autant de motifs de justification de son emploi. Ce que nous pourrons tâcher de vérifier un peu plus loin sur notre exemple.

La situation est alors devenue la suivante : le corps C des nombres complexes contient un sous corps C_1 identifié à IR. Moyennant l'identification, on décrit donc un coiffement sur les deux Formes (u + z) et (u. z), qui ont la même substance selon que u et z sont interprétés comme nombres réels *per se*, ou comme ces nombres complexes particuliers que sont les nombres réels. On pourra ainsi rétrospectivement conclure que la fonction véritable des canons électifs (2) et (3), aura été d'assurer que les deux définitions acquises du Point et de la Croix sur l'ensemble des nombres complexes aient été, moyennant l'identification, des ponts.

On dit aujourd'hui usuellement que "C contient IR à un isomorphisme près", ou encore (c'est la même chose) qu'un nombre réel est un certain nombre complexe "à une identification près". Ces expressions sont quotidiennes dans la littérature mathématique contemporaine. Un nombre réel a et un couple (a,0) sont ainsi "presque identiques" au sens suivant : toute propriété que l'une des deux expressions viendrait à vérifier admet aussitôt en droit une traduction, nécessaire et immédiate, pour l'autre, à condition toutefois que la formule concernée ne fasse intervenir que somme et produit. Dans la pratique quotidienne cependant, toutes ces réserves -pourtant constitutives- seront vite oubliées : qui voudra véritablement se souvenir qu'un nombre réel rencontré dans un calcul "complexe" n'est pas à proprement parler un nombre, mais un couple d'un type particulier ? Ou encore qu'un nombre complexe n'est pas un "nombre", mais un couple de réels ?

---

65 Ainsi "Ramis", op.cit, ayant primitivement noté e= (1,0), indique ensuite, page 131 : "cette remarque [sq. de l'isomorphisme] nous permet de simplifier l'écriture en écrivant *a* au lieu de *a . e* (...) on exprime parfois ce fait en disant qu'on *identifie* les éléments de C* à ceux de R ". Et il insiste, par cette note de bas de page: "Il ne s'agit, en fait, que d'une *simplification d'écriture* légitimée par l'isomorphisme. " (Italiques dans le texte).

66 C'est en effet violer ici la règle d'univocité : deux objets structurellement distincts, comme le sont ici un couple et un nombre, (et étudiés comme tels) devraient en effet nécessairement présenter des Formes ou des signes distincts.

67 IMBERT C, *Ecrits logiques....*, op. cit, 24 "Outre qu'un système recevant, dans le cours d'un même calcul, deux interprétations, est ambigu, Frege objecte..."

Revenons alors à notre construction du corps des nombres complexes, pour constater qu'on a d'abord, pour la loi de somme de couples :

$$(a, b) = (a, 0) + (0, b)$$

Par une première identification, on conviendra ainsi d'abord d'écrire a en place de (a,0). D'autre part, en calculant suivant le produit de couples, on obtient :

$$(b, 0). (0, 1) = (0, b)$$

Ecrivant alors de même b en place de (b, 0), on a ainsi

$$(0, b) = b.(0, 1).$$

Par double identification, on a ainsi gagné la formule :

$$(a, b) = a + b. (0, 1),$$

dite de *décomposition*. L'identification a permis de simplifier ainsi considérablement la description des couples (a, b) : en fin de compte, à une identification près, tout se ramène à deux nombres usuels (de signes a et b) et au seul couple (de signe (0, 1)) universellement présent dans la décomposition. Ce couple (0,1) dont la seconde composante n'est pas Zéro et qui ne peut certes pas être identifié à un nombre réel, constitue en quelque sorte l'archétype du "non-réel". Il est en même temps tout ce qui demeure à expliquer dans la formule de décomposition. Or, en en effectuant le produit par lui-même, on obtient :

$$(0, 1). (0, 1) = (- 1, 0)$$

où le Point représente le produit de couples. Par identification à nouveau, on substitue -1 en place de (- 1, 0), en sorte que (0, 1) est ainsi un couple tel que son carré vaille - 1. Le premier canon électif (1) est ainsi transposé sur l'espace des couples, et il est décisif pour fournir un objet à la Forme $\sqrt{-1}$, suivant :

$$(0, 1) = \sqrt{-1}$$

Ainsi se trouve dénouée l'énigme de Bombelli, et par un prolongement adéquat [68]. La méthodologie est aujourd'hui commune, parfois reprise sous une variante matricielle équivalente, en une démarche alternative que G. Granger analyse à juste titre comme comme un fait de style [69]. Alors, pour tout nombre complexe de représentation (a, b), la formule de décomposition prendra la forme définitive :

---

68 La première occurence historique de radicaux sur du négatif se trouve chez Albert Girard dans son *Invention nouvelle en l'Algèbre* (Amsterdam, 1629) où il écrit $\sqrt{-2}$. Une Forme reprise par Wallis, Newton, Leibniz, Euler. C'est Euler qui utilisa le premier (1777) la lettre *i* en place de $\sqrt{-1}$ ("*De formulis differentialibus* ...", in Mémoires de l'Académie de Saint-Petersbourg, = *Institutiones calculi integralis*, IV, Saint-Petersbourg, 1794, 18.

Si le *i* eulérien est aujourd'hui d'usage universel en mathématiques, son triomphe ne fut aucunement aisément acquis. En 1849 encore, un algébriste aussi avisé qu'Augustus DE MORGAN faisait usage de la Forme $\sqrt{-1}$ (DE MORGAN A, *Trigonometry and Double Algebra*. London.1849). Sur tous ces points historiques relatifs au i et au $\sqrt{-1}$, Cf. CAJORI, II, *Symbolism for Imaginaries and Vector Analysis* , 126-141.

69 *Essai d'une philosophie du style*, op. cit, 20-21.

$$(a, b) = a + b . \sqrt{-1}$$

ce qui était aussi véritablement visé. Dans ces conditions aussi, sur le corps *C* des nombres complexes, l'équation algébrique du second degré:

$$x^2 = -1$$

admet des solutions et (0, 1) en est une. Une propriété qui était fausse sur le corps IR des nombres réels. Et, sans aucune exception, toutes les constructions du corps C des nombres complexes se présentent aujourd'hui avec cette même méthodologie. Les exposés eux-mêmes s'offrent cependant sous une forme synthétique, directe et brève, éliminant comme à l'ordinaire, non seulement tous les préalables historiques, mais surtout, sur le plan de l'épistémologie, ce que nous avons *supra* plus longuement décrit comme la démarche même de la recherche qui a dirigé la construction [70].

14.4.4 Conclusions.

Outre son intérêt historique, considérable comme on l'a dit, cet exemple présente deux spécificités épistémologiques. D'abord et secondairement, les canons "électifs", dont le choix ne répond ordinairement qu'aux nécessités du pont, ont ici été en réalité imposés de l'extérieur, par les exigences des équations cubiques. Mais la construction a surtout mis en lumière une variante épistémologique majeure du prolongement, elle aussi devenue usuelle aujourd'hui. Toute la procédure s'y est en effet déroulée non pas sur le terrain originel et naturel des "nombres", mais après déplacement, sur le celui des couples de nombres, où elle a été suivie par une identification, portant avec elle un coiffement. Et ce n'est qu'au prix de ce changement de cadres, et du déplacement-identification, qu'une fois le coiffement ainsi mis en place, la procédure canonique est alors venue se dérouler, tout comme le prolongement. Une variante désormais commune, bien intégrée dans la méthodologie contemporaine et qu'on observe par exemple dans l'élaboration du concept de distributions par Laurent Schwartz (cf. ci-dessous 14.5. Cinquième exemple).

Ainsi un schéma de prolongement vint-il dénouer au début de ce siècle ce paradoxe originaire de la Forme $\sqrt{-1}$ et des "quantités imaginaires". Fondée sur la complète liberté de concevoir des représentations (ici, des couples) qui soient à la fois légitimes et dégagées de tout constructivisme géométrique, ce type d'idée avait été en fait inaccessible aux mathématiciens du XVII^e siècle. Même si la construction amenait avec elle des laissés-pour-compte qu'on découvrit peu à peu [71],

---

70 Cf. par exemple "Ramis", op.cit.

71 L'apparente facilité avec laquelle les formules de calcul de Leibniz et Bernoulli pour le prolongement des exponentielles s'étaient montrées fécondes - à défaut d'être validées - allait entraîner les deux géomètres à postuler, à propos de ces quantités imaginaires, des extensions nouvelles, en particulier logarithmiques. La question devint ainsi de donner signification à la Forme :

$$\log(p + q\sqrt{-1})$$

elle pouvait elle aussi paraître miraculeuse, pour avoir apporté une signification à

$$\sqrt{-1}.$$

14.5 Quelques exemples de prolongements.

Nous présentons ici quelques exemples choisis, modernes ou contemporains, de l'emploi du schéma de prolongement. A l'origine de chacun, se retrouvera cette même question, qu'avait déjà posée Gauss : comment fournir une signification à une Forme qui n'en a pas ? A chaque réponse acceptable à la question, à chaque solution véritable apportée à l'énigme, sera alors associée cette double contrepartie : d'une part la création d'un objet mathématique neuf, d'autre part l'élargissement de validité des formules électives. Ainsi, cette liste d'exemples, qui n'est certes pas limitative, se constituera-t-elle dans des domaines variés des mathématiques et comportera-t-elle chaque fois l'indication des canons électifs. D'un autre côté, dans notre présentation de ces exemples destinés à nourrir la réflexion épistémologique sur la création de certains concepts, nous avons exceptionnellement laissé de côté nombre d'origines et de références historiques précisées : comme d'ordinaire en effet, l'histoire véritable de ces concepts se poursuit à travers plusieurs auteurs et plusieurs oeuvres, en un récit qu'il ne peut être question d'entreprendre dans le présent cadre.

Premier exemple : n étant le signe d'un entier naturel, on désigne par f (n) le produit des n premiers entiers : la "fonction factorielle" (en signes modernes n!) [72]. Comment fournir une signification à la Forme

---

Rien *a priori* n'empêchait en effet que la méthode de prolongement, employée avec succès pour la somme et le produit de "quantités imaginaires" ne pût convenir pour leurs logarithmes, à partir du canon logarithmique, à nouveau pris pour électif :

$$\log (a\, b) = \log (a) + \log (b)$$

où a et b sont les signes de "quantités imaginaires". Une démarche complètement "naturelle", au sens ici donné à ce terme, c'est-à-dire dans le droit-fil des prolongements précédents; elle conduisit cependant les deux géomètres à des paralogismes. En effet, avec $a = b = \sqrt{-1}$, on obtient :

$$2 \log (\sqrt{-1}) = \log (-1) \text{ et cette dernière quantité ne se peut, car}$$
$$\log (-1) + \log (-1) = \log 1 = 0$$

Ainsi, en première analyse, le canon logarithmique se révèla-t-il un laissé-pour-compte du prolongement. Cette question et ces controverses sont aujourd'hui bien éclaircies. Sur cette question fort connue de l'histoire des mathématiques, nous renvoyons par exemple à un article de J.L Verley, *La controverse des nombres négatifs et imaginaires*, in *Fragments d'Histoire des Mathématiques*, Brochure N° 41 de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (APMEP), 1981, pages 121-140. En dépit de son échec (qui ne fut que momentané), le seul fait d'avoir cependant tenté ce prolongement logarithmique, montre bien à quel point, dès l'époque de Leibniz, le mécanisme du prolongement avait été bien intériorisé.

72 Inconnue d'Euler, la Forme

n!

est due à C. KRAMP qui, dans ses *Eléments d'arithmétique universelle* (Cologne. 1808), écrit dans la section "Notations" : "Je me sers de la notation très simple n! pour désigner le produit de nombres décroissants depuis n jusqu'à l'unité, savoir n(n-1)(n-2)...3.2.1. L'emploi continuel de l'analyse

$\boxed{x!}$ ou encore f (x)

si x est le signe d'un nombre réel positif ? La question peut sembler particulièrement absurde, tant la définition de la factorielle paraît structurellement associée aux entiers naturels ! Que peut bien signifier par exemple "factorielle un-demi" ?

La méthode, due à Euler, utilisa ce canon électif simple vérifié par la factorielle :

$n! = n.(n - 1)!$, soit

$f(n) = n.\ f(n - 1)$. Le prolongement revint alors ici à produire, si c'était possible, un pont $\Gamma : IR^{+*} \to IR$ tel que soit vérifiée sur IR^{+*} l'équation fonctionnelle :

$$\Gamma(x) = x.\ \Gamma(x - 1)$$

C'est Euler, dans une lettre à Goldbach de 1729 [73], qui fournit une valeur décisive pour la fonction Gamma (également appelée, depuis Legendre, *fonction eulérienne de seconde espèce*), en l'occurence :

$$\Gamma(x) = \lim_{n \to \infty} \frac{1.2\ldots(n-1)}{x(x+1)\ldots(x+n-1)}\, n^x$$

une formule [74] dont on observera que si x est le signe d'un entier naturel, elle conduit effectivement à prendre la substance de $\Gamma(x)$ égale à celle de la factorielle de $(x - 1)$. Ultérieurement, Euler produisit une formule encore nouvelle, et équivalente, sous la forme de ce qu'on appelle aujourd'hui une intégrale généralisée [75].

Quelle que soit cependant la définition de Gamma, on aura bien:

$\Gamma(n) = (n - 1)!$ pour n entier et $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ (qui, est ainsi la valeur prêtée à "factorielle un-demi"). La fonction Gamma est aujourd'hui une fonction transcendante usuelle, d'un très large emploi dans toutes les branches des mathématiques.

---

combinatoire que je fais dans la plupart de mes démonstrations a rendu cette notation indispensable." Sur ce point de *Factorial* "n", cf. CAJORI, II, 71-73.

73 Cf.FUSS P H, *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVII^e siècle*,Volume I.Saint Petersbourg.1843.

74 En fait la définition initiale d'Euler était, comme il arrive souvent chez lui, celle d'un produit infini :

$$\Gamma(x) = \frac{1}{x}\prod_{n=1}^{\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^x\left(1+\frac{x}{n}\right)^{-1}\right\}$$

Euler montra l'équivalence entre les deux formules. Pour l'analyse de ces diverses transformations, on pourra consulter le chapitre XII (*The Gamma Function)* in WHITTAKER E.T and WATSON G.N, *A course of MODERN ANALYSIS*,. Cambridge University Press. 1969. 235-264.

75 $\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t}\, t^{x-1}\, dt$, où x est un réel positif (par extension, un nombre complexe dont la partie réelle est positive).

Deuxième exemple : Comment fournir une signification à la Forme :

$$\boxed{e^{(a+b.\sqrt{-1})}}$$

où a et b sont les signes de deux nombres réels, par exemple $e^{\sqrt{-1}}$? Il s'agit encore d'un nouveau prolongement exponentiel, toujours fondé sur la Forme e^z, le coiffement allant ici des réels vers les complexes. A cette Forme évidemment initialement dépourvue d'objet, c'est encore une fois Euler qui apporta une signification dans l'*Introductio Analysin Infinitorum*, au moyen de ce développement en série entière :

$$e^x = 1 + \frac{x}{1\,!} + \frac{x^2}{2\,!} + \ldots + \frac{x^n}{n\,!} + \ldots\ldots$$

canon électif, qui était à l'époque reconnu pour valable si x était le signe d'un nombre réel [76]. En termes un peu plus modernes : $e^x = \sum_{n \in \mathrm{IN}} \frac{x^n}{n\,!})$. La définition d'Euler revint dans les faits [77] à simplement poser, par prolongement :

$$e^{a+b.\sqrt{-1}} = 1 + \frac{(a+b.\sqrt{-1})}{1\,!} + \frac{(a+b.\sqrt{-1})^2}{2\,!} + \ldots + \frac{(a+b.\sqrt{-1})^n}{n\,!} + \ldots\ldots$$

On observera encore une fois ici en quoi, contrairement aux apparences, un prolongement n'est pas une simple analogie. Revient en effet ici la question de la compatibilité : si la substance de b est en effet nulle, c'est-à-dire si le complexe de signe $a + 0\sqrt{-1}$ vient à être particularisé en le réel de signe a, alors viennent à coïncider les définitions de e^a au sens "leibnizien" antérieur et de $e^{(a+0.\sqrt{-1})}$ au sens nouveau. Loin d'être anecdotique, cette définition de e^z où z est le signe d'un nombre complexe, aujourd'hui usuelle, fut d'abord le premier exemple historique de fonction holomorphe dans tout le plan complexe. Elle conduisit ensuite à éclairer définitivement les relations entre fonctions circulaires et hyperboliques.

On a brièvement décrit en 11.7 (en note de bas de page) comment, au moyen du *même* canon électif, on peut fournir une signification à la Forme

---

76 Si la substance du résultat était connue depuis Leibniz et Jean Bernoulli, Leibniz cependant n'impliquera jamais la Forme e^x dans aucun canon.

77 La définition initiale d'Euler dans l'*Introductio* est en vérité plus proche de notre moderne :

$e^x = \lim_{n \to \infty} (1 + \frac{x}{n})^n$ où x est le signe d'un réel, Euler considérant le développement en série entière comme une conséquence seulement. Ses successeurs, comme les présentations modernes, inversent usuellement l 'ordre des résultats.

$$\boxed{e^{A}}$$

où A est le signe d'une matrice carrée complexe (dont la taille a par exemple pour signe p), par exemple $e^{\begin{bmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 5 & 6 & -7 \\ 4 & 0 & 17 \end{bmatrix}}$ organisant ainsi encore un nouveau prolongement sur la même Forme exponentielle. Il convient de mettre d'abord en évidence l'indispensable coiffement initial. A une identification près en effet, tout nombre complexe est une certaine matrice carrée : on identifie le complexe de signe z et la matrice carrée de signe z.I, où I désigne la matrice unité dont la taille a pour signe p. Ainsi définies, les exponentielles de matrices sont aujourd'hui d'usage courant, par exemple dans la résolution de systèmes différentiels linéaires. On portera cependant au débit de ce prolongement l'existence d'un "laissé-pour-compte". On a en effet en général:

$$e^{A} . e^{B} \neq e^{A+B}$$

si A et B sont interprétés comme matrices carrées [78]. Autrement dit, le "canon exponentiel" leibnizien, vérifié si A et B sont les signes de nombres réels ou complexes et qui avait tant servi aux précédents prolongements, n'est plus désormais valide. Un autre canon électif ayant été ici choisi, savoir ici le développement en série entière, le "canon exponentiel" émarge désormais au registre des pertes.

Troisième exemple : Comment fournir une signification à la Forme :

$$\boxed{\cos(a + b.\sqrt{-1})}$$

où a et b sont les signes de deux nombres réels et "cos" celui de la fonction cosinus ? Une solution n'allait certes pas ici de soi, tant la définition initiale de cosinus fut longtemps étroitement liée au "cercle trigonométrique". C'est encore une fois Euler, avec pour canon électif un nouveau développement en série entière "réel" qui apporta un prolongement :

$$\cos x = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2.n)!} \text{ et } \cos(a + b.\sqrt{-1}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{(-1)^n (a + b.\sqrt{-1})^{2n}}{(2.n)!}$$

L'usage de la trigonométrie complexe (cos (z), sin (z), tan (z), où z est le signe d'un nombre complexe), accompagné d'un formulaire adapté, est aujourd'hui tout à fait quotidien. On observera par exemple que, dans ce cadre, les modules de sin (z) et cos (z) ne sont plus désormais majorés comme ils l'étaient dans le cas réel (par l'unité) [79], et que, par exemple, les équations :

$$\cos(z) = 2 \text{ ou } \sin(z) = -3$$

[78] Si le canon est faux, le résultat peut être néanmoins valide dans certains cas; la commutativité (A.B = B.A) du produit des deux matrices en est par exemple une condition suffisante.
[79] sin (z) et cos (z) ne sont bornés dans aucun demi-plan du plan complexe.

admettent désormais des solutions. Il ne s'agit plus cette fois de propriétés laissées-pour-compte dans le prolongement, mais au contraire, et toujours dans la perspective d'une dialectique de bifurcation, de certains "profits" : l'équation cos (z) = 2 admet des solutions au sens complexe, mais non au sens réel. Par une simple adaptation, le schéma permet de fournir pareillement une signification à la Forme :

$$\boxed{\cos(A)}$$

où A est le signe d'une matrice carrée complexe (cosinus d'une matrice).

Quatrième exemple : Comment fournir une signification à la Forme

$$\boxed{A^{-1}}$$

où A est le signe d'une matrice complexe quelconque, c'est-à-dire qui peut être non carrée, ou bien carrée non inversible ? Là encore, la question posée peut paraître contradictoire ou absurde : comment définir l'inverse d'une matrice qui précisément n'est pas inversible ? Il y eut pourtant ici plusieurs prolongements réussis, à l'effet de construire ce que ses créateurs appelèrent chaque fois la "pseudo-inverse" d'une matrice, en respectant l'extension initiale des champs (le coiffement) : toute matrice inversible étant en effet (à l'évidence !) une matrice quelconque, le pont, c'est-à-dire la définition neuve de la pseudo inverse doit être tel que si la matrice vient à être carrée inversible, la pseudo inverse coincide avec l'inverse. La solution aujourd'hui la plus connue fut dénommée "pseudo-inverse de Moore-Penrose" du nom de ses deux créateurs [80] qui choisirent, comme à l'ordinaire, un certain nombre de formules électives vérifiées par l'inverse de signe X d'une matrice carrée inversible de signe A, en l'occurence ces quatre canons bien usuels:

$$A.X.A = X \quad X.A.X = X \quad (A.X)^* = A.X \quad (X.A)^* = X.A$$

où le Point représente le produit matriciel et l'Etoile l'adjointe d'une matrice complexe [81], puis en un procédé algébrique désormais sans surprise, les *prirent pour définition* de leur propre pseudo-inverse d'une matrice quelconque de signe A. Cet ensemble de quatre canons, véritablement banals pour une inverse véritable [82], sont

---

80 MOORE E. H, *On the reciprocal of the general algebraic matrix*, Abstract in Bull. Amer. Math. Soc, XXVI (1920), 394-395.
PENROSE R *A generalized inverse for matrices*, Proc. Cambridge. Philos. Soc, LI, England, (1955), 406-413 et *On best approximate solutions of linear matrix equations*, Proc. Cambridge. Philos. Soc, LII, (1956), 17-19.

81 C'est-à-dire la conjuguée de sa transposée.

82 En effet, si A est le signe d'une matrice carrée inversible et A-1 celui de son inverse, on a bien simplement :

en effet décisifs à la définition par prolongement de la pseudo inverse.[83] Nullement anecdotiques, les pseudo-inverses de Moore-Penrose sont aujourd'hui largement étudiées et ont des applications dans des domaines très divers : statistiques (regression), électricité (somme-parallèle de quadripôles), programmation linéaire.

Une autre solution, plus analytique, consiste à munir l'espace vectoriel des matrices d'une norme quelconque (de signe// //) et à constater que si une matrice carrée de signe A [84] est inversible, son inverse est évidemment l'unique matrice carrée (de signe B) telle que:

//A.B -I //= 0,

où le Point est le signe du produit de matrices, I celui de la matrice unité [85]. Cette condition est évidemment équivalente à

// A.B -I //est minimum

puisqu'une norme ne peut prendre que des valeurs positives ou nulles. C'est cette proposition, ainsi judicieusement transformée de la proposition initiale, qui va servir de canon électif, ce point étant évidemment crucial. Et dans ce cas, comme dans tous nos autres exemples, c'est bien de l'étendue et de la richesse des capacités inventives du géomètre qu'aura en fin de compte directement dépendu le choix adéquat et fécond des propositions électives. Si A est en effet le signe d'une matrice complexe "rectangle" dont la taille a pour signe (n, p), on définit sa *pseudo-inverse à droite*, de signe B, par le fait que celle-ci, dont la taille a pour signe (p, n), vérifie la même proposition élective :

// A.B -I //est minimum,

où I est le signe de la matrice unité [86]. On observe d'abord que, dans ces conditions, pour toute matrice de signe B, le produit matriciel, de signe A.B est possible et fournit une matrice carrée [87], donc qu'est définie la Forme A.B- I et qu'elle représente aussi une matrice carrée de même taille. Naturellement aussi, que si A est carrée inversible, la pseudo inverse à droite coincide avec l'inverse : le pont est bien compatible avec l'extension objectale. Reste à vérifier, que le canon est décisif -c'est le coeur du schéma- c'est-à-dire qu'il livre une et une seule solution pour la matrice de signe B. On doit alors constater ici que la propriété n'est pas toujours valide, le résultat dépendant du type de normes : existence et unicité de la pseudo-inverse sont cependant assurées si la norme choisie est d'un type particulier, dite strictement

---

$A.A^{-1}.A= A$ et $A^{-1}.A.A^{-1}= A$ et $(A.A^{-1})^*= A.A^{-1}$ (= I) et $(A^{-1}.A)^* = A^{-1}.A$ (= I).

83 C'est-à-dire que si la matrice rectangle complexe, quelconque, de signe A, est connue, le système de quatre canons fournit dans tous les cas une et une seule solution pour celle de signe X, un résultat qui constitue le théorème de Penrose.

84 Dont la taille a pour signe p.

85 Dont la taille a pour signe p.

86 Dont la taille a pour signe n.

87 Dont la taille a pour signe p.

convexe [88]. Dans ces conditions cependant, on définit naturellement de la même façon une pseudo-inverse à gauche, si elle existe (sa taille a pour signe (p, n)). Naturellement aussi, si A est carrée inversible, les deux pseudo inverses à droite et à gauche coincident avec l'inverse. De là, au regard de toute norme strictement convexe, la définition, pour une matrice quelconque, de ses deux pseudo-inverses à droite et à gauche [89].

Cinquième exemple : Comment fournir une signification à la Forme

$$\boxed{\phi'}$$

où ϕ est le signe d'une fonction non nécessairement dérivable, et où l'Accent représente la dérivation! Une question, à nouveau bien surprenante, qui fut pourtant bien sérieusement soulevée à propos d'une fonction particulière, de signe Y, dite de Heaviside, étudiée en vue de ses applications à l'électricité, et qui n'était certes pas dérivable à l'origine [90]. Comment dans ce cas fournir une signification à la Forme Y'?

Une réponse, par prolongement avec changement de cadres, fut fournie par Laurent Schwartz qui produisit d'abord une extension objectale neuve en considérant la classe de "presque toutes" les fonctions [91] comme incluse dans une classe nouvelle qu'il créa à cet effet et dénomma *distributions.* Schwartz lui-même définit ses distributions, au terme d'une méthode particulièrement subtile [92], comme "généralisation des fonctions". On notera cependant qu'en un schéma désormais remarquablement bien rôdé, ses distributions n'étaient des "généralisations" des fonctions qu'au prix d'une identification [93]. Dans ces

---

88 C'est-à-dire telle que si l'on a

$$//A+B//=//A//+//B// \text{ et si } B \neq 0,$$

alors il existe un réel positif de signe t tel que

A = t. B.La norme hermitienne est par exemple strictement convexe.

89 A cette question, toutefois traitée dans un cadre vectoriel légèrement plus général, nous avions consacré notre thèse complémentaire de Doctorat d'Etat de Mathématiques, sous le titre : "*Pseudo-inverses d'endomorphismes d'espaces vectoriels strictement convexes.*".

90 Y est la fonction numérique réelle telle que $Y(x) = 1$ si $x > 0$ et $Y(x) = 0$, si $x \leq 0$.

91 "Presque toutes" est ici mis pour "localement intégrables".

92 Cf. SCHWARTZ L, *Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.* Hermann. Paris.1965. Aussi *Cours d'Analyse.* Tome I. Hermann. Paris. 1967.

93 Par le canon :

$$T(\phi)(g) = \int_{IR^n} \phi(x).g(x)\,dx$$ (qu'on égalera par définition, à un produit scalaire :

$< T(\phi), g >$), toute fonction ϕ (de IR^n vers IR pour simplifier) localement intégrable définit une forme linéaire continue $T(\phi)$ sur un espace fonctionnel auxiliaire E (dans le canon, $g \in E$ est quelconque). E est l'espace vectoriel de toutes les fonctions g, de IR^n vers IR, qui sont C^∞ à support compact. Dans la pratique, cet espace n'a d'autre intérêt que d'exister pour fournir ici des "fonctions-tests". E est ensuite muni d'une famille de semi-normes et c'est au sens de cette famille de semi-normes que s'apprécie le terme "continuité". Dans ces conditions, Schwartz appelle *distribution* toute forme linéaire continue sur E. Toute fonction localement intégrable ϕ définit ainsi une et une seule distribution $T(\phi)$, qui est dite associée à ϕ mais il y a des distributions qui ne sont pas associées à des fonctions. En décidant d'identifier ϕ et $T(\phi)$, Schwartz organise ainsi un coiffement : des fonctions vers les distributions.

conditions cependant, et à l'effet de définir la dérivée d'une fonction éventuellement non-dérivable, c'est la formule d'intégration par parties que Schwartz choisit pour canon électif. Et ce canon est effectivement décisif pour définir un pont [94], c'est-à-dire fournir une signification à ϕ'. Loin d'être le produit insolite d'une construction artificielle, la théorie des distributions, qui valut à Laurent Schwartz la médaille Fields [95], est aujourd'hui le cadre théorique incontournable -enseigné dans toutes les Universités et écoles d'ingénieurs- de la théorie du signal électrique, dont elle a contribué à remanier profondément les conceptions intuitives préalables.

Nous évoquerons plus brièvement encore trois derniers exemples, le premier déjà indiqué en note *supra* est dû à Gauss et à la question qu'il pose, en dehors de toute nécessité initiale de signification : comment peut-on, demande-t-il à Bessel, donner un sens à la Forme :

$$\boxed{\int^{a+b.\sqrt{-1}} \phi(x)\,dx}$$

qui n'en a pas, puisque la borne supérieure est une "quantité imaginaire" ? Une problématique qui relève à l'évidence du même registre que nos exemples *supra*. Cette question fut à l'origine de la création, par ce même Gauss, de l'importante théorie des fonctions de variables complexes.

Un autre exemple est celui-ci : comment définir la dérivée f'(a) d'une fonction $f : U \to F$, en un point a de U, si E et F sont deux espaces vectoriels normés quelconques [96], et U un ouvert de E ? Historiquement, la question s'était très tôt posée et dans les cas les plus simples où f est par exemple une fonction réelle de deux variables réelles ($f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$). Même dans ce cas, la recherche était apparue comme vaine, tout essai de solution butant ici sur le fait que l'extension naturelle à partir de la dérivation ordinaire (de IR vers IR) ne peut

---

94 On vérifie que, si $g \in E$, et si f est d'abord supposée dérivable, est alors valide la formule d'intégrations par parties : $< T(f), g' > = - < f, T(g') >$ (T (g ') existe) : c 'est le canon électif. Si T est maintenant une distribution quelconque (non nécessairement associée à une fonction), Schwartz *définit* la dérivée T'de la distribution T de façon *telle* que le canon électif reste valide, c'est-à-dire par

$< T, g' > = - < T', g >$ et il montre que le canon est décisif à cet effet. Il a donc organisé un pont. Si maintenant ϕ est une fonction localement bornée, mais non dérivable, elle définit néanmoins une distribution $T(\phi)$, dont la distribution dérivée $[T(\phi)]'$ est fournie par :

$< T(\phi), g' > = - < [T(\phi)]', g >$.

364 $[T(\phi)]'$ est appelée la **dérivée de ϕ au sens des distributions.** On observe donc ici une dialectique de bifurcation quant à la dérivabilité, soit au sens des fonctions, soit à celui des distributions.

95 Au congrès de Harvard, en 1950.

96 Ils ne sont pas nécessairement de dimension finie.

spontanément se faire : le canon de définition de la dérivée utilise organiquement un quotient [97], et on ne peut, en aucun cas, envisager un quotient de vecteurs. La méthode consiste alors à utiliser un canon qui, logiquement équivalent à la dérivabilité dans IR, se prête cette fois à être décisif pour un prolongement entre espaces normés [98]. On reconnait ici, dans le choix judicieux d'un canon, parmi d'autres qui lui sont pourtant logiquement équivalents, un des effets de l'art du mathématicien.

Nous proposerons enfin un exemple personnel récent[99], où nous avions commencé par établir un coiffement en considérant -à une identification près- les sous ensembles "ordinaires" d'un ensemble Ω comme un des cas particuliers seulement des 3-partitions ordonnées de ce même Ω, c'est-à-dire des triplets $(P^0, P^1, P^2) = P$ de sous ensembles de Ω deux à deux disjoints et dont la réunion vaut Ω. On identifie alors un (vrai) sous-ensemble A à la 3-partition.

$(\bar{A}, \emptyset, A)$, moyennant quoi [100] tout sous-ensemble est une certaine 3-partition (par nous appelée *quasi-ensemble*), mais il y a, selon la dialectique du coiffement, des 3-partitions qui ne sont pas des sous-ensembles. La question était alors pour nous de fournir une signification aux Formes :

$$P \cap Q \text{ et } P \cup Q$$

où P et Q sont les signes de deux 3-partitions, de façon telle que si P et Q sont des sous-ensembles, les substances obtenues coïncident avec l'intersection et la réunion ensemblistes. Ce sont évidemment comme d'ordinaire les assembleurs qui sont sans signification et le problème est celui de la construction d'un pont, pour lequel nous avons utilisé avec succès une famille de sept canons décisifs[101]. La théorie fournit ainsi une extension "naturelle", à l'ordre trois, du concept bien usuel de l'ensemble des parties d'un ensemble.

Ce que nous avons voulu dégager des divers exemples de ce chapitre, sous le nom de schéma de prolongement, nous semble ainsi apparaître comme un mode de pensée et d'activité de recherche usuels en mathématiques, s'organisant chaque fois autour de ces Formes sans

---

97 $f'(a) = \lim_{x \to a} \frac{f(x) - f(a)}{x - a}$

98 Ce sera ici la "différentiablité": $f(a+h) = f(a) + f'(a).h + o(\|h\|)$, canon naturellement valide dans IR, et équivalent à la dérivabilité. Sous cette Forme, il peut alors s'étendre au cas général d'une application entre deux espaces normés ; sur ce point, on pourra consulter CARTAN, H, *Calcul différentiel*. Hermann. Paris. 1967.

99 SERFATI M : *The lattice theory of r-ordered partitions*, Rapport 95-34. LITP -IBP. Universités Paris VI, Paris VII et CNRS (URA 248). A paraître dans *Discrete Mathematics*.

100 $\bar{A}$ désigne le complémentaire de A dans Ω.

101 Ceux qui constituent en treillis distributif l'ensemble de toutes les 3-partitions : le centre (*i.e* l'ensemble de tous les éléments complémentés du treillis) est alors -à une identification booléenne près- l'ensemble $P(\Omega)$ de toutes les parties de Ω.

signification qui peuvent initialement apparaître comme autant de fantaisies. Nous nous sommes efforcés de décrire la réalité des efforts du mathématicien pour leur fournir un cadre réglementaire où, finalement, elles prennent sens.

Conclusions.

Conclusions.

15.1 Combinatoire et significations au XVII^{e} siècle.

Ainsi, de Viète à Descartes, l'écriture symbolique mathématique s'est-elle constituée, revêtant les aspects principaux de sa structure actuelle. Elle apportait aux géomètres diverses facultés neuves et essentielles. D'abord, au moyen des assembleurs, Délimitants, et constitutifs, l'écriture de formes symboliques, interprétées par l'exécution successive dans un ordre prescrit, d'un nombre parfois considérable d'opérations, inexprimable en fait par l'écriture rhétorique, dont l'incapacité définitive à décrire sans ambiguïté ne fût-ce qu'une succession de trois instructions s'était traduite au XVI^{e} siècle par toutes les difficultés qu'on a détaillées chez Cardan. Utilisant à plein un jeu de conventions hiérarchiques implicites, une ligne de calcul de la fin du XVII^{e} siècle pouvait par contre usuellement comporter vingt cinq résultats partiels, au déchiffrement néanmoins facile. Ainsi, apparemment seulement quantitative, cette différence entre rhétorique et symbolique, portant sur le nombre d'opérations effectuables, se transforma-t-elle en une différence de nature.

Nous avons aussi décrit l'introduction, du fait de Viète, de Lettres pour l'indéterminé, interprétées comme grandeurs à la fois fixées et arbitraires. Usuelle en géométrie depuis l'antiquité, cette faculté était absolument inédite dans le calcul, où elle serait apparue comme une authentique contradiction dans les termes. Nous nous sommes efforcés de montrer en quoi le système des Lettres de Viète déplaça en vérité le fondement même de l'interprétation : chaque Lettre étant devenue la représentation d'une convention quant au Donné et non quant à son explicitation, le système d'interprétation peut être ici après-coup regardé comme le moyen, en quelque sorte nécessaire, de dépasser la contradiction fondatrice. Le schéma littéral épousa donc la même dialectique du "singulier mais quelconque", constitutive du géométrique, dont les corollaires devinrent aussitôt semblablement valides dans le calcul : constitution d'objets idéaux et, corrélativement, d'un sujet abstrait de la connaissance mathématique.

La création essentielle, sous la plume de Descartes, d'un nouvel assemblage exponentiel allait ensuite délivrer l'écriture des puissances des apories cossiques et constituer un paradigme pour la représentation symbolique à venir de tout concept mathématique composé. Car Descartes fut en effet le premier à analyser exhaustivement les trois difficultés de la question et les rassembler dans son exponentielle : d'une part qu'il y avait non pas un, mais deux concepts primitifs à représenter, que dans conditions il fallait aussi symboliser leur liaison -ceci nécessitant donc trois signes- enfin que ces deux concepts primitifs pouvaient (et devaient) être eux aussi analysés en des termes mathématiques préexistants, Indéterminé et nombre. Il leur assigna alors comme charactères respectifs une Lettre et un Chiffre, c'est-à-dire la matière ordinaire dont était tissé le texte symbolique. Quant à la liaison, Descartes la représenta par un signe neuf, le Blanc exponentiel. Pour simple qu'elle nous apparaisse aujourd'hui, cette analyse n'avait pas été effectuée avant lui. Dès lors, la solution apportée par Descartes au problème de la représentation des puissances valut implicitement, à l'égard de la postérité, Leibniz au premier chef, pour modèle épistémologique de la représentation de tous les concepts mathématiques composés, organisant ainsi ce que nous avons appelé le droit-fil institutionnel : assembleurs avec places ouvertes et Lettres-Chiffres.

15.1.1 La *Géométrie*, ou la pierre de Rosette.

Toutes ces modifications et ces bouleversements symboliques accumulés allaient se trouver mis en acte dans la *Géométrie* de 1637. Et nous revenons maintenant, sur le point des Délimitants, à la supériorité que nous avions reconnue à la *Géométrie* sur l'*Ars Magna*, et dont nous avons posé l'élucidation, dans les lignes inaugurales de cette thèse, comme un problème central. A l'analyse, on constate d'abord que l'absence de tout Délimitant explicite dans l'*Ars Magna* réduit le texte à une concaténation de symboles, sans ordre prescrit qui se puisse lire : en conséquence, la représentation par Cardan, dans l'exemple introductif, du développement du cube d'une somme de deux termes dont chacun est soit une fraction, soit une Forme contenant un radical carré, produit un texte proprement indéchiffrable par le lecteur. D'un autre côté, la *Géométrie*, qui, à la notable exception du *vinculum* pour les radicaux, ne contient pourtant guère plus de Délimitants explicites que l'*Ars Magna*, obéit cependant à des règles hiérarchiques souterraines fixes, qui structurent le texte et permettent sa complète lecture. En définitive, ce n'est donc pas tant le manque de Délimitants explicites qui rend un texte indéchiffrable que l'absence de règles, implicites ou explicites, gouvernant cette élision. A cet égard, placée sur le devant de la scène par la richesse de son contenu autant que par l'autorité de Descartes, la *Géométrie*, en dépit de l'absence complète d'indications symboliques de la part de son auteur, servit néanmoins de modèle incontesté à la postérité pour le déchiffrage des textes symboliques à venir (la "pierre de Rosette"), non seulement donc pour les signes et formes symboliques qu'elle apportait avec elle au lecteur neuf du XVIIe siècle, mais aussi par ce qu'elle ne contenait pas : des signes délimitants. Cette absence faisait en effet ressortir en creux les règles hiérarchiques implicites qui allaient dès lors gouverner tous les termes symboliques à venir. La *Géométrie* aura ainsi été le tout premier texte de l'histoire des mathématiques à faire un usage extensif et conséquent d'une certaine absence: celle de signes délimitants.

La constitution de l'écriture symbolique, aux côtés de la rhétorique usuelle, aura *ipso facto* aussi entraîné la mise en place de deux registres distincts : d'une part, le combinatoire, avec son système de signes et sa syntaxe, celui des significations d'autre part, exprimé dans la langue naturelle. Un développement qui ne se fit certes pas de façon concertée chez les géomètres du temps, mais dans l'observance de règles tacites, gouvernant les signes nouveaux. Et c'est cette écriture symbolique là, qu'il dénomma le Calcul, auquel il opposa ensuite son Nouveau Calcul, que le jeune Leibniz ébloui reçut de ses prédécesseurs; et c'est à Viète et Descartes, qu'à juste titre, il en attribuera la création.

En conclusion de cette section, on retrouvera Descartes et la Règle IV : "Car cet art, qu'ils appellent d'un nom arabe "Algèbre", ne me semble être rien d'autre [sq. que l'analyse des Anciens] si seulement on pouvait le débarrasser de la multiplicité des nombres et des figures inexplicables qui le ruinent, afin qu'il ne lui manque plus cette grande facilité et transparence, que nous supposons devoir être dans la vraie *Mathesis* [1]". A cette clarté, Viète et Descartes auront donc grandement contribué. Descartes cependant, n'était pas un formaliste, et ne se préocuppait guère de questions de symbolique. Et c'est en quelque sorte malgré lui qu'il contribua de façon décisive aux progrès de l'écriture mathématique, et que de toute sa mathématique, c'est peut être paradoxalement son système exponentiel qui lui a aujourd'hui le plus durablement survécu [2]. Quoiqu'il en soit, les résultats de ces diverses entreprises, en cette première moitié du XVII^e siècle, n'auront certes pas réalisé ce voeu de Descartes d'une réintégration de l'analyse des anciens dans le corpus mathématique du temps, mais au contraire assuré la fondation d'une science algébrique autonome, moderne, se développant sur un corps de problèmes visant des objets mathématiques neufs, associés à leur seule représentation. A ces questions d'origine symbolique, inconcevables pour Descartes, c'est ensuite Leibniz qui donnera la première grande impulsion historique.

15.1.2 Alors vint Leibniz.

Dès les premières années du XVII^e siècle, se répandit ainsi peu à peu en Europe l'écriture symbolique, avec ses règles, son rythme et son registre propres. En même temps, l'obligation primitive de transcription des écritures symboliques en termes rhétoriques se relâcha peu à peu, pour être, après Descartes, abandonnée dans les faits. La séparation entre les deux registres se fit alors chaque jour plus tranchée, l'écriture symbolique gagnant parfois une large

1 *Regulae* , op. cit., 377, 4 -9.

2 Cf. COSTABEL "Que l'on ne s'attende pas à trouver en Descartes un de ces mathématiciens qui sont hantés par le perfectionnement des symbolismes et dont le champ de conscience est dominé par l'opératoire." *La mathématique de Descartes avant la* Géométrie, in *Démarches originales de Descartes savant,* op. cit, 30.

autonomie. Sous la domination et l'autorité neuves du symbolique, commença alors à s'observer au cours du XVII^{e} siècle le premier des détachements historiques d'avec la géométrie comme l'antique juge de paix en mathématiques, c'est-à-dire le garant de la vérité. Nous revenons ici sur une Forme exemplaire, déjà évoquée en 12.2 (*Le Nouveau Calcul de Leibniz)*, et qui montre à quel point la situation avait évolué à la fin du XVII^{e} siècle, et aussi combien Leibniz pouvait extensivement user des métamorphoses.

Leibniz avait introduit différentiation et sommation comme deux opérations antagonistes, et en même temps constitutives de la nouveauté même de son Calcul ; il les avait respectivement représentées par deux Figures, le Dée et le Esse. Ainsi, dans les années 1700, Leibniz et Jacques Bernoulli inventoriaient-ils les possibilités de sommation effective de certaines Formes, selon leur structure. C'est dans ce contexte que, dans une lettre d'avril 1705 à Bernoulli [3], Leibniz considèra d'abord la lettre e, signe, dit-il, d'un nombre, puis les Figures ♀, ☽ et ♃, qui devaient être, selon lui, interprétées comme des "formules" quelconques (*i.e* ce que nous avons ici appelé Formes). Et Leibniz d'organiser alors un assemblage et une Forme, au moyen du Vée (radical), du Point et de l'Esse, dans lequel il substitue ses Figures, pour obtenir :

$$♀\sqrt[e]{☽} + \int ♃\sqrt[e]{☽}\,dx$$

Ne présentant aucune espèce d'interprétation géométrique -à quoi se résumaient à l'époque les questions de sens- cet assemblage terminal était ainsi conçu d'une façon purement combinatoire, en dehors de toute signification initiale. Un pur jeu sur les signes donc, et qui avait utilisé pleinement la capacité de substitution : ☽ et ♃ sont en effet des formes symboliques abstraites. Ce n'est qu'en un temps second que Leibniz examinera les possibilités de sommation effective de la Forme complète, selon la spécificité des "formules" ☽ et ♃, qui peuvent ainsi être, *a priori*, très générales, ceci constituant précisément l'intérêt principal de l'étude pour son auteur. L'extrême généralité du cadre leibnizien conduit donc à ceci, qu'on a peu remarqué: une Figure leibnizienne, comme ☽, peut être rétrospectivement interprétée comme ce qu'on appellera plus tard une fonction *quelconque*, et non pas seulement analytique [4].

Après Leibniz, plus tard encore, l'écriture symbolique deviendra, pour les mathématiciens, le lieu de l'expérience et presque le seul, mettant ainsi en acte le voeu de Descartes : "faire avec des nombres ce que les anciens faisaient avec des figures". Il nous paraît que Descartes se sera ici montré véritablement prophétique : tout

3 M.S, II, 100 et 104.

4 Cf. aussi, dans la même veine *Quadraturae Irrationalium simplicium* , Avril 1705, M.S, V, 366.

ce que nous avons en effet analysé sous le nom de jeux de substitutions et de métamorphoses, telles les littéralisations, aussi les échanges, et les places vides, mais ouvertes, et qui appellent une Lettre, tout cet appareil combinatoire portant donc sur des Lettres, allait en vérité se montrer d'une efficacité mathématique remarquable, dépassant sur ce point toutes les manipulations que les anciens avaient pu faire sur les figures géométriques, droites et cercles par exemple. La figure géométrique proprement dite se vit alors peu à peu retirer sa valeur décisive, et même lorsqu'il s'agira de géométrie proprement dite, c'est au calcul qu'aujourd'hui le plus souvent, on s'en remet de la charge ultime de la preuve et de la vérité. Il fut donc, en ces premières années du XVII^e siècle, en grande partie du fait de Viète et Descartes, un saut épistémologique majeur, permis aux mathématiques par la constitution d'un registre symbolique spécifique; en d'autres termes, les mathématiques accédèrent alors à cet âge nouveau, qu'on pourra juger plus adulte, de l'assomption du signe et de l'écriture.

Les contributions des trois protagonistes, Viète, Descartes et Leibniz furent de nature bien différente, et souvent le produit de préoccupations bien éloignées de leurs réalisations effectives sur le terrain. Ainsi, animé par un souci juridique primordial de mettre en forme une distinction entre le mathématique et le physique, Viète créa l'Indéterminé, et sa représentation par Lettres, bouleversant les principes antiques, jusque-là intangibles, de l'écriture mathématique. D'un autre côté, comme prétendu corollaire de sa Méthode, et alors qu'il était bien étranger aux questions combinatoires, Descartes, dans la *Géométrie*, allait faire, presque malgré lui, la première vraie démonstration de la force de l'écriture symbolique, de son aisance et sa fluidité. Leibniz enfin, qui n'avait rien inventé de la structure de l'appareil symbolique dont il héritait -même s'il y ajouta nombre d'assembleurs et signes de son crû- fut le premier à en comprendre l'extra-ordinaire puissance et à en développer, dans un registre véritablement moderne, des applications proprement inconcevables pour ses deux prédécesseurs.

Sur le plan des contenus mathématiques, on notera le rôle historique décisif, maintes fois souligné, de la résolution des équations du troisième degré, dans l'avènement de l'écriture symbolique. Si cette théorie est aujourd'hui une rubrique subalterne de celle des équations algébriques générales, elle-même bien connue et étudiée, il n'en était certes pas de même au temps de Viète, Descartes et Leibniz, où elle représentait au contraire le bouleversement récent et majeur que le XVI^e siècle venait d'apporter, en une notable rupture avec les vingt siècles qui précédaient, durant lesquels l'étude n'avait jamais dépassé le cas quadratique. D'un autre côté, il se trouva que la solution de ces équations était tout à fait difficile à exprimer rhétoriquement, même sous forme de comptine, alors que, comme chacun pouvait le constater, la "reigle de Cardan", symboliquement réécrite par Descartes dans le livre III de la *Géométrie*, fournissait le résultat en une ligne. Ainsi les nécessités des équations cubiques firent-elles grandement progresser la constitution de l'écriture symbolique au début du XVII^e siècle. Sur un autre plan, mais pareillement crucial, ces mêmes équations du troisième degré furent aussi les premières à placer devant le géomètre la Forme sans signification $\sqrt{-1}$.

15.2 Art combinatoire et sélection naturelle.

Nous avons décrit comment l'institution de la substituabilité combinatoire, élément d'une considérable importance dans le registre symbolique, ne fut pas le fait de Viète, ni de Descartes, qui en avaient pourtant préparé le terrain, mais de Leibniz qui en fit au contraire un usage quotidien. Sur ce plan symbolique, Leibniz fut en vérité à la substitution ce que Viète représenta pour l'Indéterminé, et Descartes pour l'exponentielle. Comme nous l'avons analysé, Leibniz découvrit d'abord ce qu'il appela son Algorithme, puis son Nouveau Calcul, et qui était le coeur de la création de son Calcul des Différences et des Sommes, au moyen d'un emploi systématique de métamorphoses dans des formes symboliques déjà constituées. C'est aussi lui qui constitua les premiers canons généraux à partir de l'examen d'exemples spécifiques, tel la différentielle d'une puissance :

$$d\,(x^{a}) = a.x^{a-1}.\,dx$$

à partir des égalités numériques :

$$d\,(x^{3}) = 3.\,x^{2}.\,dx \text{ et } d\,(x^{4}) = 4.\,x^{3}.\,dx.$$

Le procédé d'élaboration de la formule (une canonisation, au sens propre) est aujourd'hui si banal et usuel qu'on ne se soucie plus d'en justifier les fondements ni de savoir comment il a fonctionné. Rappelons pourtant les conclusions de notre analyse détaillée: il utilise en fait un jeu de substitutions, nécessaire et relativement complexe. La procédure de canonisation est ainsi devenue une nouvelle figure transcendentale, et son résultat, c'est-à-dire le canon ultime, un moyen remarquablement utile de dégager l'essence d'une situation mathématique. Répétons le : ce schéma était profondément nouveau à l'époque de Leibniz. Ainsi donc, ce que Leibniz désigna sous le nom d'Art Combinatoire peut-il être en bref aujourd'hui décrit comme le mode d'emploi de la substituabilité.

D'autre part, et comme nous nous sommes aussi efforcés de le montrer, le seul examen synoptique d'une Forme ou d'une formule fut, pour Leibniz et ses successeurs, bien souvent à l'origine d'idées gouvernant sa manipulation, parfois en fonction de son interprétation, souvent aussi en dehors de toute considération de sa signification, au moins initialement. Une méthodologie elle aussi profondément nouvelle au XVII^e siècle, et pareillement apportée par Leibniz. Avant Leibniz en effet, dans les premiers temps de la constitution des deux registres, les seuls mouvements de pensée reconnus comme légitimes se faisaient dans le sens de la représentation : du registre des significations vers le symbolique. Ni Descartes, ni bien entendu Cardan ne considérèrent qu'ils pussent recevoir des suggestions provenant du texte symbolique! Leibniz s'autorisa par contre à parfois recevoir du texte symbolique des informations directes, non initialement corrélées à une signification et à les utiliser en retour pour manipuler ce même symbolique, c'est-à-dire à agir avant de savoir ce que signifie l'action, étant entendu qu'une épreuve de réalité viendrait après coup sanctionner la procédure. Répétons le: Leibniz est à notre connaissance le seul mathématicien de l'histoire à jamais avoir revendiqué cette forme de liberté d'agir, pourtant si fort utilisée par d'autres, aujourd'hui encore. Ainsi avait-il reconnu au texte symbolique cette faculté cruciale de "véhiculer essentiellement des combinaisons d'informations portant sur [sa] propre structure", que souligne G. Granger [5]. Quoiqu'il en soit, agissant de la sorte, Leibniz fut conduit à prendre en compte le registre symbolique en tant que tel, c'est-à-dire pourvu d'une existence certaine *per se* : dès lors, l'autonomisation du texte symbolique et l'élargissement, ainsi compris, de la pratique de l'Art combinatoire, furent à l'évidence, historiquement liés de façon indissoluble.

Traduit dans le registre des significations, cet Art combinatoire auquel il accordait ainsi tant de confiance, conduira alors Leibniz, soit à des résultats ultérieurs féconds et insoupçonnés, et, dans les faits, inaccessibles autrement à cette époque -comme dans le cas de l'Algorithme- soit à des conclusions triviales ou dénuées d'intérêt, soit enfin à des apories, comme dans le cas des différentielles à exposants fractionnaires [6], selon $d^{1:2}x$. Car l'Art combinatoire, chez Leibniz comme tous ceux qui lui succédèrent, comporte les deux temps obligés de la genèse et du contrôle (ou sanction). En un premier temps, il est nécessaire de disposer d'un moyen de produire automatiquement des formules sans égard à leur signification, en une procédure tant vantée par Leibniz, dont on voit bien à quel point il s'oppose ici méthodologiquement à Descartes. En un temps second, c'est l'auteur lui-même, ou bien la communauté des géomètres qui vient sanctionner, trancher, choisir et éliminer après coup, c'est-à-dire après examen des significations aveuglément produites par le combinatoire. L'ensemble du processus peut être ainsi décrit comme une "sélection naturelle", le caractère inattendu de certains résultats étant alors à mettre au compte des résistances qu'offraient la tradition et l'usage mathématiques, parfois depuis longtemps ancrés, et qui imposaient une vision figée des relations entres les concepts préexistants. Parce qu'il est aveugle, le jeu combinatoire permet ainsi de s'affranchir de cette contrainte. Du moins Leibniz l'espérait-il. Et le résultat de la substitution combinatoire peut parfois paraître stupéfiant à son auteur même, découvrant une propriété

5 in *Essai d'une philosophie du style*. Armand Colin. Paris. 1968, page 22.
6 M.S, III, 228.

à laquelle il n'aurait jamais pensé. Ainsi de Leibniz et de Jean Bernoulli émerveillés devant leur trouvaille de la différentielle n-ième d'un produit de deux termes [7]:

$$" \; d^n(xy) = d^n x \,.\, d^0 y + n\, d^{n-1} x \,.\, d^1 y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, d^{n-2} x \,.\, d^2 y + \ldots \text{ usque ad } d^0 x \,.\, d^n y \; "$$

où Leibniz précise d'une part que les coefficients en jeu sont les coefficients combinatoires (nous disons aujourd'hui binomiaux) et aussi qu'il écrit au nom de la loi d'homogénéïté d^0y en place de y par exemple de façon à assurer ce qu'il appelle une "harmonie". La formule nouvelle a été obtenue, de l'aveu même des deux géomètres, par pure substitution à partir de la puissance n-ième d'un binôme, autrement dit la formule de Newton dans un cas simple. Pour rendre compte de l'analogie de structure entre les deux formules, Leibniz écrit $p^n(x+y)$ au lieu de $(x+y)^n$, et il obtient pareillement :

$$" \; p^n(x+y) = p^n x \,.\, p^0 y + n\, p^{n-1} x \,.\, p^1 y + \frac{n(n-1)}{1\,.\,2}\, p^{n-2} x \,.\, p^2 y + \ldots \text{ usque ad } p^0 x \,.\, p^n y \; "$$

La métamorphose leibnizienne est ici très remarquable, constituée de deux substitutions portant sur les seuls assembleurs, complètement en dehors du sens : le Point s'est substitué à la Croix et le Dée au Pée, signe leibnizien du produit. Et la sanction a ici délivré après-coup un résultat valide, d'une considérable importance, aujourd'hui encore enseigné en premier cycle universitaire comme "formule de Leibniz". A les relire, on découvre, en un échange presque comique, un Leibniz et un Bernoulli stupéfaits de leur audace et leur propre découverte [8]. Le jeu combinatoire peut ainsi sembler s'opposer, non seulement à l'usage, mais aussi, en un certain sens, à la rationalité.

15.3 Le paradoxe leibnizien.

Nous commentons brièvement ici l'évolution chez Leibniz de ses conceptions mathématiques.

---

7 *Symbolismus Memorabilis Calculi algebraici et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum et de lege homogeneorum transcendentali,* in *Miscellanea Berolinensia,* 1710 = M.S, V, 377-382.

8 "Et puto nescio quid arcani subesse", dit Leibniz (MS, II, 175). "Haud dubie aliquid arcani subest" répond Bernoulli (MS, II, 179).

Les deux *Epistolae* de Newton de 1676, par les exemples stupéfiants mais constructifs des deux exponentielles successives qu'elles proposaient à Leibniz, lui apportèrent d'abord cette foi indéfectible en la toute puissance de l'écriture symbolique pour laquelle il n'avait pas jusqu'alors manifesté d'intérêt particulier, mais qui dès lors ne devait plus le quitter. D'un autre côté, le reste de la lettre de Newton véhiculait un corpus considérable de formules cohérentes et extraordinairement efficaces sur les développements en série entière, un sujet que Leibniz ne connaissait pas à cette époque. Sans éclipser son résultat sur la quadrature arithmétique du cercle, l'*Epistola Prior* dissuada cependant Leibniz de recherches ultérieures dans cette direction. Sous la pression de ces raisons conjuguées, Leibniz, retourné à Hanovre, délaissant les mathématiques opératoires, se consacra d'abord, autour de 1679, à un projet neuf, le premier d'un registre véritablement symbolique, l'élaboration d'une Charactéristique géométrique, qu'il communiqua à Huygens resté à Paris. Répétons le : l'origine chez Leibniz de toutes ces préoccupations symboliques qui allaient dès lors gouverner sa pensée mathématique, réside, incontestablement à notre sens, dans l'*Epistola Prior* de juin 1676 [9]. Nous avons décrit en 12.2 comment il mit ensuite au point en 1683-1684 son Algorithme général du Calcul des Différences par l'Art combinatoire, c'est-à-dire primitivement en dehors de toute considération de signification. Rappelons que la *Nova Methodus* ne contient *aucune démonstration* des résultats pourtant essentiels qu'elle annonce (et qui sont véridiques). Nous évoquerons alors le paradoxe essentiel auquel Leibniz fut dès lors confronté, qui demeura tout au long de sa vie et constitua la toile de fond de sa querelle avec Newton : d'une part il se montrait incapable de donner à son Nouveau Calcul aucune espèce de fondement ontologique "raisonnable". Le terme ne doit pas être pris dans une quelconque acception contemporaine et anachronique, mais au regard de l'ontologie mathématique en vigueur chez les géomètres du XVII^{e} siècle, pour laquelle les "explications" de Leibniz sur ses infinitésimaux, faites de comparaisons et d'analogie (par exemple avec le mécanisme des imaginaires) demeuraient largement insatisfaisantes, même selon les seuls critères du temps. D'un autre côté, une fois que Leibniz lui-même, ou son interlocuteur, en avait admis des préalables confus et contradictoires, le même Calcul s'ordonnait en une superbe mécanique. Celle-ci débouchait de surcroît sur un vaste champ d'applications de natures très diverses, dont l'authenticité et l'utilité manifestes étaient donc quotidiennement vérifiables et vérifiées. Dès lors, à partir des années 1690, des géomètres, chaque jour plus nombreux, écrivirent naturellement à Leibniz pour qu'il les éclaire sur le fond de ce Nouveau Calcul qu'il avait inventé et dont ils souhaitaient

---

9 Ni Child, ni Hofmann, ni surtout Knobloch, qui inventorie les manuscrits de Leibniz à Paris, ne font état de travaux de Leibniz dans le domaine symbolique, préalables à 1676. Cf. CHILD J.M, *Early mathematical manuscripts of Leibniz,* op. cit, HOFMANN J, *Leibniz in Paris,* op. cit. et KNOBLOCH E, *Falsch datierte Handschriften mit Doppel-und Mehrfachindizies* in *Die unveröffentlicheten mathematischen Arbeiten von Leibniz*, op. cit.

devenir des adeptes. Ce fut le cas de jeunes géomètres, comme de l'Hôpital [10], Varignon [11] ou Grandi [12], mais aussi de savants reconnus comme Wallis [13] et surtout Huygens [14], le vieux maître, dont le ralliement au Calcul nouveau fit tant plaisir à Leibniz. De la situation intellectuellement inconfortable dans laquelle se trouvait néanmoins Leibniz témoignent à notre sens les correspondances paradoxales qu'il échangea avec les adeptes. Il était en vérité incapable de donner un sens à ses fictions d' "infinitésimaux" prétendument fondatrices. Pas davantage ne crut-il possible, comme le firent bien plus tard de Morgan et Babbage par exemple, de demander ouvertement, à des adeptes de bonne volonté et qui, pour la plupart, auraient sans doute volontiers accepté, d'employer aveuglément les règles du calcul sans se soucier de l'ontologie. A l'égard de ses interlocuteurs, il se contentait donc d'un discours rituel où il commençait par évoquer l'analogie avec les imaginaires, érigée en paradigme, avant de leur faire constater, sur des exemples toujours plus nombreux et variés, le fonctionnement impeccable d'une machine qu'il avait élaborée par le pur jeu de l'Art combinatoire.

De cette situation qui aurait pu paraître inconfortable, Leibniz, avec son optimisme coutumier [15], tira au contraire des conclusions bien positives, en affermissant sa croyance en la toute puissance de l'écriture symbolique en soi -à vrai dire, la seule véritable force théorique du Nouveau Calcul- qui fut dès lors si complètement renforcée qu'elle en devint le pivot de sa vision du monde en mathématiques [16].

15.4 Formes sans significations.

---

10 Leibniz à de l'Hôpital, du 28/04/93. M.S, I (2), 236-241.

11 Leibniz à Varignon, du 2 février 1702. M.S, IV, 91-97. Cette célèbre lettre a donné lieu à un abondant commentaire. A notre sens, il ne faut pas cependant y chercher ce qui serait (enfin !) le fondement des infinitésimaux leibniziens ou de son introuvable "science de l'infini". A la manière du "principe du chaudron" qu'évoque Freud, Leibniz se contente en effet d'accumuler et juxtaposer des arguments parfois contradictoires ou sans rapport entre eux.

12 Leibniz à Grandi, du 11 Juillet 1705. M.S, IV, 210-212.

13 Leibniz à Wallis, de Juin 1697. M.S, IV, 11-14.

14 Leibniz à Huygens, du 11 Juillet 1690, M.S, I (2), 41-44. La correspondance entre Leibniz et Huygens, interrompue à partir de 1680 (et l'affaire de la Charactéristique géométrique) jusqu'en 1690, reprit de façon continue à partir de Février 1690, dans le cadre du Nouveau Calcul leibnizien.

15 Sur l' "optimisme mathématique" de Leibniz et sa capacité d' "invention algorithmique", on pourra consulter PARMENTIER M, *Leibniz. Naissance du calcul différentiel*. Vrin. Paris. 1989. 7-10 et 11-52.

378

16 Parallèlement, il produisait une théorie des substances simples qui, à notre sens, pouvait rendre compte du paradoxe : dès lors en effet que le concept de chaque substance en contient immuablement le passé et l'avenir, ses accidents et ses harmonies, peu importait en effet la légitimité du moyen trouvé pour le mettre à jour, fût-il impropre ou apparemment insusceptible d'être véritablement fondé.

Revenons à une Forme à laquelle un prolongement a fourni une signification. Son objet est dès lors disponible pour des calculs nouveaux, éventuellement d'autres prolongements, en un procédé fondamental de l'invention. On s'interrogera ici brièvement en conclusion sur les motifs possibles de semblables créations. Dans le cas $\sqrt{-1}$, la motivation, initiale et forte, était celle de la résolution des équations cubiques. Quoiqu'en des termes différents, l'affaire des exponentielles reposait cependant la même question de la motivation, qui ne fut en fait jamais tranchée : avec la réussite des prolongements en effet, disparut en même temps toute nécessité pour le géomètre de rendre compte de ses motivations, qui auraient pu pourtant paraître surprenantes, d'examiner ainsi des Formes, comme la "factorielle" d'Euler, dont l'interprétation initiale était absente, ambiguë ou contradictoire. Au XXe siècle, comme le montre l'exemple des distributions, les facilités apportées par la méthodologie ensembliste vinrent parachever l'évolution, en sorte que la question de la motivation, à supposer qu'elle ait été envisagée auparavant, ne se posa désormais plus. Et en vérité, ni Newton, ni Leibniz, ni Euler n'estimèrent nécessaire de motiver la définition de leurs exponentielles respectives, Leibniz en particulier semblant naïvement considérer que toute extension allait de soi et était bonne à prendre. Etendre la factorielle aux nombres réels fut pareillement pour Euler une motivation "naturelle" sans qu'il lui parut convenable de rechercher plus avant une justification profonde de sa démarche. De la même façon, si les distributions de Laurent Schwartz, trouvèrent, comme on l'a dit, une incontestable origine dans l'énigme de la fonction de Heaviside, la théorie est aujourd'hui considérée par la communauté mathématique comme justifiée *en soi* par la procédure d'extension de la notion du concept de fonction, présentée partout -à juste titre- comme un modèle épistémologique. Ainsi le succès du procédé dispensa-t-il aussitôt de la recherche de ses origines : dans tous ces exemples en effet, nous nous sommes efforcés de montrer comment la visée du géomètre apparement naïve et grossière -fournir une signification à une Forme qui en était dépourvue- aura en fin de compte largement participé à l'avancement des mathématiques effectives. En conséquence, le géomètre, fut "naturellement" conduit à examiner, sans états d'âme ni tentative de justification ultime, certaines des Formes sans significations, initialement produites par le jeu combinatoire comme pures concaténations de signes, à les éprouver et les soumettre à ce que nous avons appelé une sanction, c'est-à-dire une épreuve de réalité, dont le prolongement n'est que l'une des modalités [17].

17 En l'absence de preuves, nous avancerons ici avec prudence. Ou bien un prolongement a réussi, et le procédé est requalifié en "naturel" par son auteur et la communauté. Ou bien, il avorte et il n'en est plus trace, les Formes sans significations produites par l'Art combinatoire ayant été seulement intérieurement évoquées, avant d'être écartées. Elles ont parfois pourtant effectivement été essayées sur un brouillon. A la notable exception de Leibniz cependant, les géomètres ne gardèrent pas les brouillons manuscrits des tentatives qui n'ont pas abouti, qui portent la trace des errements co-extensifs à toute recherche.

Le dénouement de l'exemple "imaginaire" est d'autre part venu clairement souligner la très considérable ouverture ontologique qu'apporta l'introduction, au début de notre siècle, de la théorie des ensembles. L'usage des plus simples axiomes, ceux des parties ou des couples, devenus avec le temps naturels, presque convenus, a eu cet effet spectaculaire de radicalement changer la règle du jeu ontologique, dans une proportion sans mesure commune avec les extensions successives antérieures et procurant ainsi aux mathématiciens cette liberté considérable de création d'objets dont nous usons si familièrement aujourd'hui. [18]

Comme on a vu aussi, l'aboutissement de tout prolongement ouvre en même temps un registre de laissés-pour compte et de bénéfices, avec pour corollaire obligé une dialectique de bifurcation. On fera simplement observer que cette dialectique organise des alternatives, non seulement inouïes, mais surtout inconcevables avant le prolongement, en même temps qu'elle semble contourner et dissoudre les contradictions. Ainsi les questions : "l'équation $1 + x^2 = 0$ admet-elle des solutions ?" et "la Forme $\sqrt{-1}$ a-t-elle une signification ?" étaient-elles fondées *per se* pour le géomètre du XVII[e] siècle, c'est-à-dire en tant que questions, même s'il n'en connaissait pas les réponses : quoiqu'il pût en effet en être de l'état futur des connaissances, il devait croire que celles-ci ne pourraient être, ultimement, que "oui ou non". Une assurance fondée sur le bon sens, et que vint conforter, trois siècles plus tard, la célèbre formule de Hilbert selon laquelle, en mathématiques, il n'y aurait pas d'*ignorabimus*. Or, à propos de la première question, la réussite du prolongement examinée en 14.4 contraint en vérité le géomètre moderne à s'extraire de ce tiers exclu, et à s'inscrire au contraire dans cette dialectique obligée : "non, au sens des nombres réels, mais oui, au sens des nombres complexes." Ainsi l'interrogation dix-septièmiste aura-t-elle été dissoute en tant que question par la théorie moderne.

Nous avions enfin déjà noté qu'en l'absence de canon décisif, le schéma du prolongement peut continuer de se dérouler, à condition toutefois d'introduire à nouveau des conditions étrangères contingentes (canons ou formules adventices) qui permettront ultimement une spécification de la Clé opératoire recherchée. Le procédé est encore bien vivant en mathématiques aujourd'hui, comme on l'a décrit sur l'exemple des distributions. D'un autre côté, il se peut aussi que dans cette situation d'indétermination essentielle, le géomètre

---

18 On trouvera une analyse, brève mais précise, de la construction de divers concepts de la théorie élémentaire des ensembles, accompagnée de quelques textes historiques, in CEGIELSKI P, *Historique de la théorie élémentaire des ensembles*, in *Fragments d'histoire des mathématiques*, II, brochure N° 85 de l'Association des Professeurs de Mathématiques de l'Enseignement Public (A.P.M.E.P, 26 Rue Duméril, 75013 Paris), Avril 1987, 161- 210.

moderne ne cherche pas à spécifier davantage l'interprétation de l'assembleur, mais, en renversant les positions entre Formes et canons électifs, cherche à examiner abstraitement, à propos d'un ensemble de canons valables dans un certain champ, *tous* les coiffements possibles tels qu'il existe chaque fois un pont adapté, c'est-à-dire, en fin de compte, tels que les canons électifs soient à nouveau valables par extension en dehors des champs originaires. Ainsi se trouve organisée la définition (ou la création) d'objet par axiomatisation [19]: une méta-procédure en vérité, lorsqu'on la rapporte aux perspectives de notre seul schéma préalable, aujourd'hui cependant devenue si courante, que le procédé s'en trouve en quelque sorte banalisé. A l'étude de ce thème qui dépasse les objectifs de la présente thèse, nous réservons une publication future.

---

19 Ainsi de la constitution du concept d'ensemble ordonné "abstrait" à partir de propositions électives. La visée du géomètre est de donner sens à la propositionnelle

$$x \leq y$$

dans des situations élargies diverses où x et y ne sont plus les signes de nombres réels, mais de ceux des éléments d'un ensemble quelconque de signe E. La construction effective actuelle peut être attribuée, selon les interprétations et le niveau d'exigence, soit à Schröder, soit à Birkhoff. Le schéma du prolongement porte donc cette fois, non plus sur une Forme, mais sur une propositionnelle. Pour fournir un objet à $x \leq y$, le géomètre décida de choisir trois propositions électives parmi celles vérifiées par l'ordre sur les nombres réels. Ce furent la réflexivité, l'antisymétrie et la transitivité, c'est à dire respectivement ces trois formules universelles :

1°) $(x \leq x)$
2°) $\{(x \leq y) \wedge (y \leq x) \Rightarrow (x = y)\}$
3°) $\{(x \leq y) \wedge (y \leq z) \Rightarrow (x \leq z)\}$

La méthode conduisit donc à appeler *ordre* sur un ensemble quelconque de signe E toute relation binaire sur lui, de signe $\leq$, vérifiant les trois propositions précédentes et où x, y et z sont interprétés comme trois quelconques de ses éléments. On appela ensuite *ensemble ordonné* tout couple $(E, \leq)$ où E est le signe d'un ensemble et $\leq$ celui d'un ordre sur lui, concept algébrique crucial dont par exemple, les structures de treillis, d'algèbres de Boole et de Post ne constituent que des instances. La contingence du choix des axiomes conduisit aussi à diverses définitions alternatives ou complémentaires, telles celles des relations de *préordre* et de *tolérance*. L' exemple support $(\mathbb{R}, \leq)$ du corps *ordonné* des nombres réels apparait alors en retour comme une instance seulement (mais néanmoins fondatrice) de la structure générale d'ensemble ordonné qu'à partir de lui, le schéma aura ainsi permis de construire.

L'arbitraire du choix des propositions électives parmi toutes celles qui sont vérifiées pour les nombres réels, constitutives du prolongement, est ici bien plus apparent que dans le cas "imaginaire". La différence majeure est cependant autre : ce qui est ici visé sous le terme d'ensemble ordonné n'est pas la constitution d'une structure dans sa singularité -comme le corps des nombres complexes-, mais ce qu'on peut appeler selon le point de vue un concept ou une essence, celle de l' "ordre " en soi (que Descartes aurait sans doute voulu constituer), une structure abstraite ou générale (Bourbaki), ou une classe d'algèbres abstraites ou universelles (Birkhoff). Relativement à une visée aussi considérablement élargie, la nature même de ce que nous avions appelé champs, ponts, pertes, profits, etc... est elle-même inévitablement modifiée. La méthode des canons électifs concourt en vérité à l'invention d'une classe de structures algébriques axiomatiquement définies, en un procédé devenu aujourd'hui complètement usuel.

15.5 Ecriture symbolique et langue naturelle.

Nous avons à plusieurs reprises mis à jour certaines des différences décisives entre rhétorique et écriture symbolique mathématique; nous résumons ici les conclusions de quelques unes de nos remarques, qui porteront à la fois sur le déchiffrement et sur la production de significations.

La première des différences tient d'abord en ce truisme : la constatation qu'il y a ici non plus une, mais deux écritures en présence, et aussi qu'elles occupent, l'une par rapport à l'autre, des positions dissymétriques. Tout commentaire sur un énoncé rhétorique se fait en effet également rhétoriquement : avec cette acception, il ne peut donc y avoir ici de métalangage. Par contre, le commentaire exhaustif (virtuel !) du symbolique se fait par le truchement de l'écriture rhétorique qui épouse les nécessités de la langue naturelle et non de la langue symbolique ! Nous ne parlerons pourtant pas davantage ici de métalangage, qui impliquerait une gradation de niveaux, là où nous avons seulement constaté la comprésence de deux registres distincts, qui ne sont certes pas rigidement rivés l'un à l'autre, mais ne sont pas non plus indépendants.

Observons ensuite qu'on peut effectuer une analyse syntaxique, première et légitime, du texte symbolique mathématique, à partir du seul examen de ses types de signes, et qu'en particulier le déchiffrage automatique par une machine, est aujourd'hui une opération algorithmique usuelle et relativement simple. A l'origine de cette simplicité, on reconnaîtra en tout premier lieu une organisation duelle, autour de deux grandes catégories de signes, Assembleurs et Lettres-Chiffres, ultérieurement complétée par des Délimitants, puis des constitutifs. La représentation symbolique mathématique est en vérité organisée autour de cette dualité, que gouverne l'usage des Délimitants, et dont l'enchevêtrement de Formes complexes est le produit direct. On a aussi décrit comment, à partir d'un constitutif et des agrégations hiérarchisées dans chaque Forme, le déchiffrement prescrit des niveaux. Cette forme de lecture binaire assignant de niveaux, inconnue dans la syntaxe de l'écriture rhétorique, s'est en fait étendue à tout le texte symbolique, même sur des Formes plus modernes, interprétées par exemple par des intégrales impropres ou des passages à la limite, telles :

$$\int_a^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{x^3+x}} \quad \text{ou} \quad \lim_n \ \sin\left[(\ n^2+n+1)\,\pi\right] \qquad [20]$$

20 Ainsi notre premier assemblage dûment complété conduit-t-il à la Forme :

$$\left(\int_a^{\infty}\left(\frac{(d(x))}{(\sqrt{((x^3)+x)}\ )}\right)\right)$$

382

apparemment éloignés des schémas de calcul des XVIIe et XVIIIe siècles. Nous ne pouvons examiner ici en détail toutes ces extensions. Ainsi le déchiffrement permet-il, en dehors de toute considération de sens, la constitution de ce que nous avons appelé l'arborescence combinatoire. La situation est en vérité fort différente dans l'écriture rhétorique : certes, le déchiffrement commence bien par s'organiser autour d'une ponctuation agrégeante explicite (points, points virgules, virgules), comme dans le cas de l'écriture symbolique mathématique. En second lieu cependant, c'est le seul blanc typographique qui vient gouverner le déchiffrement, par la reconnaissance de mots séparés. Or la syntaxe du "blanc" est bien différente de celle des Délimitants de la symbolique mathématique ; certes, deux blancs successifs délimitent bien une concaténation de lettres, qu'on désignera ici -de préférence à celui de "mot"- du terme de "string", connoté combinatoirement en dehors de toute considération de signification, et usuel dans la terminologie informatique contemporaine. Mais il n'y a aucune règle syntaxique naturelle qui vienne régir la concaténation des lettres que les "blancs" délimitent, qui soit analogue à la constitution de Formes symboliques élémentaires à l'aide de la dualité des Lettres-Chiffres et des Assembleurs, dont on aperçoit bien alors rétrospectivement le caractère structurant pour l'écriture symbolique. Pour l'écriture rhétorique donc, le déchiffrement "brut", purement automatique, rejetant tout aspect de signification conduit à une structure relativement pauvre, celle de la reconnaissance de mots comme concaténations de lettres et de la longueur de ces mots. Les arborescences linguistiques décrites par exemple chez Chomski sous le nom de diagrammes [21], présentent certes des ressemblances avec nos arborescences combinatoires, les "strings" venant ici par hypothèse remplacer les signes comme unités sémiotiques atomiques, mais cette similitude ne nous paraît pas davantage opératoire dans la construction de l'arborescence. Il nous semble ainsi bien difficile de nous limiter ici aux questions purement syntaxiques, excluant tout aspect de signification. Pour continuer dans ce registre, il faudra donc utiliser une division grammaticale seconde, en conjonctions, verbes, groupes nominaux etc..., dont, d'une part la reconnaissance automatique ne va complètement pas de soi, et qui, d'autre part et surtout, est étayée sur les significations, le combinatoire étant ici insuffisant. S'il est certes aujourd'hui possible d'analyser automatiquement la structure d'un texte rhétorique (en particulier en vue de sa traduction), l'opération comporte cependant un recours nécessaire à un traitement informatique (en particulier à des méthodes probabilistes) et il y demeure d'autre part certaines ambiguïtés structurellement irréductibles.

21 CHOMSKI N, *Structures syntaxiques*. Traduction de Michel Brodeau. Seuil. Paris. 1969, pour la traduction. cf pages 29-37 par exemple.

Ainsi la dualité combinatoire Lettres-assembleurs, traduite en objets-opérations dans le registre signifiant, est-elle essentielle à l'écriture symbolique, rien de semblable n'opérant dans la langue naturelle. Secondairement, cette dualité induit une dissymétrie entre objets et opérations dans l'analyse des Formes sans significations: c'est en effet toujours par les extensions objectales (les coiffements) que le problème commence à s'organiser, l'éventuelle production d'un prolongement ne venant qu'en second lieu concerner les interprétations opératoires.

Entre symbolique et rhétorique, on a aussi observé une autre différence notable, cette fois dans le registre de la production de signification. L'écriture symbolique est en effet en mesure de représenter sous un volume typographique réduit, une quantité considérable d'informations relative à l'exécution d'une séquence complexe d'instructions, partiellement ordonnée. De là le sentiment partagé par nombre de mathématiciens, et qu'évoquait Babbage, de la "puissance" sans égale de l'écriture symbolique. Et de fait, le contenu informatif d'une ligne de texte symbolique mathématique -mesuré en nombre d'instructions- est incomparablement plus grand que celui du même nombre de lignes rhétoriquement écrites. Autrement dit, si l'on décidait la "traduction" en termes rhétoriques d'une ligne symbolique, il y faudrait, comme nous l'avons montré en 5.4, de six à dix lignes rhétoriques selon le niveau du texte. On découvre donc ici d'abord l'importance de la valeur du rapport -qu'on pourrait mesurer- de la quantité d'information à la longueur du texte, qui, avec ces ordres de grandeur, devient un élément décisif. Le même exemple de l'équation du second degré prouve d'autre part ceci : le texte rhétorique prétendument exhaustif obtenu continue de présenter, à un examen écrit, nombre d'ambiguïtés, en dépit de toutes les précautions prises pour distinguer les "résultats" par des numéros. Que dire alors des homophonies de la lecture à haute voix ! Le texte symbolique apparaît ainsi comme doté d'un pouvoir informatif considérablement plus étendu que l'écriture rhétorique, mais s'exerçant cependant dans un champ de tâches incomparablement plus limité : l'exécution d'une suite d'instructions opératoires d'un type spécifique. Comparé aux subtilités de la rhétorique, le texte symbolique interprété n'est donc en mesure d'effectuer que peu d'actions diverses, mais il peut néanmoins en réaliser une quantité considérable, et, d'une certaine façon, il fait donc bien ce qu'il fait. Une contrepartie à ce caractère puissant et ramassé de l'écriture symbolique réside dans son extrême dépendance signifiante par rapport aux variations combinatoires, au sens où l'on dit qu'une solution d'une équation aux dérivées partielles est sensible à la variation des conditions initiales. La modification d'un seul signe, fût-il le dernier
384 dans la Ligne, tout comme la moindre substitution, peut ici altérer les significations d'une manière bien plus radicale que dans l'écriture rhétorique.

On rencontre une autre différence en comparant les effets respectifs du jeu combinatoire sur le texte symbolique et sur le rhétorique. Comme on a vu, l'action des métamorphoses sur une Forme ou une propositionnelle conduit à tout un jaillissement de Formes signifiantes. Reprenant brièvement l'exemple exponentiel de la Forme a^z, nous lui associerons ces divers exemples de transformées :

$$z^a, (1+z+z^2)^a, a^{(1+z+z^2)}, (1+z+z^2)^{a+\frac{1}{a}},$$

qui sont, au sens "leibnizien" de l'exponentielle, toutes pourvues d'objet. Si un très grand nombre d'exemples relèvent de cette rubrique et ont été analysés au chapitre 13, on a ensuite montré au chapitre 14 que le jeu combinatoire sur la même a^z, pouvait aussi conduire à des Formes sans signification, un phénomène qui nous a incité à expliciter le schéma du prolongement. Une tentative du même ordre conduite sur la combinatoire de l'écriture rhétorique conduit à des résultats franchement décevants : le jeu combinatoire produit ici au contraire des propositionnelles qui sont le plus souvent sans signification aucune, sans non plus qu'une procédure convenable vienne après-coup trouver moyen de leur en fournir une, sans même que cette question ait beaucoup d'intérêt dans la manipulation du langage, les quelques occurrences de propositionnelles pourvues de signification à l'issue de la procédure étant celles que les surréalistes et leurs "petits papiers" pouvaient obtenir. Les deux exemples, plus haut cités : "a multiplié une demi-fois par lui même" d'une part, et "la dérivée d'une fonction non dérivable" d'autre part, sont éclairants sur ce point : un lecteur qui ne connaîtrait que la langue naturelle, tel un géomètre grec, aurait été bien incapable de trouver un procédé qui leur fournisse une signification, ce qu'aura pourtant permis, en opérant sur leurs représentations, le schéma du prolongement.

Sans aucunement expliciter un relevé de différences entre rhétorique et symbolique semblable au nôtre, les mathématiciens cependant, se dirigèrent spontanément vers cette conclusion de fait : le texte symbolique devint le seul lieu de l'expérience et du travail mathématique, sans que les significations fussent restituées dans la langue naturelle, ni sur un mode explicite, ni même intérieurement, sous la forme d'une pensée en mots. L'apprentissage inconscient de l'écriture nouvelle intégra donc aussitôt ce volet nécessaire : penser directement et rapidement dans le système symbolique, en se dispensant de ce que le géomètre considéra vite comme les embarras et les lenteurs de la pensée en mots. Ce que reconnait très justement Hadamard dans son *Essai sur la psychologie de l'invention dans le domaine mathématique* [22]. Une faculté d'accès direct au symbolique qui est aujourd'hui regardée

22 Gauthier Villars. Paris. 1975. Cf. en particulier: *Les mots et la pensée sans mots,* dans le chapitre *La découverte en tant que synthèse,* pages 68-71.

comme une condition nécessaire à toute entreprise du domaine mathématique, qu'elle soit de recherche ou d'enseignement.

15.6 L'écriture symbolique, réseau de figures transcendentales.

A de nombreuses reprises dans cette thèse, nous avons mis à jour ce que nous avons appelé des figures transcendantales neuves de la connaissance mathématique. Ainsi a-t-on par exemple rangé dans cette rubrique l'enchevêtrement selon un ordre partiel d'un nombre considérable d'instructions opératoires, ramassé en quelques signes et l'organisation corrélative d'une arborescence combinatoire sous-jacente au déchiffrage, aussi l'élision muette des Délimitants, au nom de règles souterraines mais efficaces, tout comme le développement aussi spectaculaire que "naturel" des Formes exponentielles. Ont aussi émargé à ce même registre l'emploi systématique de métamorphoses aveugles comme méthode d'invention, couplé avec la "sélection naturelle" ultérieure, ainsi que les efforts obstinés et méthodiques déployés par les géomètres pour fournir un objet à des Formes qui en étaient dépourvues, et l'hypostase corrélative des formules électives semblant détenir *per se* une forme supérieure et intrinsèque de vérité. Des procédures et des figures qui sont en vérité strictement et complètement nécessaires aujourd'hui, non seulement à toute acquisition et tout développement de la connaissance mathématique, mais aussi et surtout à l'invention et à la création d'objets neufs, en même temps qu'elles sont inscrites dans la trame de l'écriture symbolique, et inconcevables en dehors d'elle. Ces figures ne se sont cependant pas constituées sans peine, comme on a vu, et ne vont parfois guère de soi. Se familiariser avec un tel corpus transcendental requit (et requiert toujours) un apprentissage spécifique de la part du géomètre, dont nous avons souligné que depuis le XVII^{e} siècle, il se construisit toujours sur le mode implicite, à partir de l'examen d'exemples existants, suivant à nouveau ici le fonctionnement de la "pierre de Rosette", inauguré par la *Géométrie.* Ainsi, l'appropriation, pourtant nécessaire, de cette grille de motifs transcendentaux fut-elle intériorisée de façon inconsciente par les mathématiciens, et l'acquisition du cadre épistémologique neuf s'accompagna de son oubli. Dès lors, à l'apprentissage de ces méthodes, la théorie aura-t-elle toujours manqué. Pour expliquer cet état de fait, on peut d'abord avancer les motifs habituels de commodité, qui se résument ici à ce qui serait la difficulté (réelle) de l'approche épistémologique. Depuis le XVII^{e} siècle cependant, les mathématiciens ont su affronter et résoudre d'autres problèmes, mathématiques ceux-là,
386 d'une complexité considérable. A nos yeux, la difficulté de la démarche épistémologique n'est pas tant en soi, qu'en ce qu'elle peut apparaître, particulièrement aux mathématiciens contemporains, comme antagoniste de celle du chercheur en mathématiques. Toute entreprise

épistémologique bien comprise procède en effet à une déconstruction analytique des procédures, rédigée dans la langue naturelle, avec toutes ses lenteurs et ses subtilités, là où l'avancement de la mathématique et les procédures de la recherche requièrent incontestablement en premier lieu une pensée jaillissante et sans mots, puis un exposé synthétique, symboliquement écrit. Dès lors, l'analyse philosophique et épistémologique des mathématiques apparaît sans doute aux mathématiciens, au-delà des déclarations officielles et sincères de compréhension et de bonne volonté, comme définitivement incapable de saisir dans son jaillissement authentique l'émergence et l'essence du processus de recherche. Dans cette conception, à nos yeux erronée et bien regrettable, le discours philosophique aurait seulement pour vocation de venir après-coup, depuis l'extérieur, recouvrir les théories d'une enveloppe superficielle, l'avancement de la mathématique quotidienne apparaissant par contre inséparable d'une mise à l'écart, au moins locale et momentanée, de toute réflexion philosophique, épistémologique, et historique. Une position nullement paradoxale en vérité, ni conjoncturelle, mais au contraire structurellement inscrite dans le mode même de développement des mathématiques, particulièrement de la science contemporaine. Ainsi, l'oubli de la méthode fait-il partie de la méthode même [23]. Alors que ce pourrait être son rôle de corriger, au moins partiellement, cette distorsion, l'histoire des mathématiques, bien trop souvent tissée dans un discours "téléologique" implicite, comme l'ont montré J. Cavaillès et M. Fichant [24], n'est pas ici d'un bien grand secours.

---

23 Dans la pratique quotidienne, tout se passe ici comme si, "toute vérité se dissipant en partie dans sa formule" (Yves Bonnefoy), le seul fait de rendre publiques et écrites des procédures épistémologiques véritables pouvait faire magiquement craindre à l'évanouissement de leur pleine capacité opératoire . A notre connaissance, le seul authentique temps fort que les mathématiciens contemporains consacrent à l'épistémologie est celui des commentaires informels (non écrits) qui suivent un exposé dans un séminaire de mathématiques. Moments brefs, vite "oubliés", mais néanmoins à l'origine de véritables reconnaissances mutuelles de compétence.

24 J. CAVAILLES : "L'histoire mathématique semble, de toutes les histoires, la moins liée à ce dont elle est véhicule ; s'il y a lien, c'est *a parte post*, servant uniquement pour la curiosité non pour l'intelligence du résultat: l'après explique l'avant. Le mathématicien n'a pas besoin de connaître le passé parce que c'est sa vocation de le refuser (...) L'oeuvre négatrice d'histoire s'accomplit dans l'histoire " : *Philosophie mathématique*, Hermann. Paris. 1962, 27-28. Ainsi observe-t-on très quotidiennement, comme l'analyse M. FICHANT, une démarche structurellement biaisée, le produit quasi-obligé d'un discours prétendument "historique", mais pris en vérité dans une trame téléologique, sous-jacente et implicite, qui le rend impropre à toute analyse épistémologique : "La téléologie est le lien extrinsèque qui fonde l'avant sur l'après en réduisant l'avant à l'après, sous les espèces de la préformation, de la préfiguration, de l'anticipation. D'où le souci de la recherche des "sources" et des filiations, et la chasse aux précurseurs. Mais on peut dire aussi bien que l'après est ramené à l'avant, puisque tout était en un sens déjà là, enveloppé dans les ombres de la préexistence. Dès lors,pourquoi l'histoire ? - sinon peut- être comme discours moralisant, leçon de patience et de modestie ; il faut attendre que le sucre fonde, comme dit Bergson.*Mais il ne s'est rien passé.* ": M. FICHANT, M. PECHEUX : *Sur l'histoire des sciences* .Maspéro. Paris.1969, page 102.

Quoiqu'il en soit, aujourd'hui, -et contrairement au XVIIe siècle-, la capacité de penser et d'agir au quotidien, directement et rapidement, au travers de ce réseau intériorisé de figures transcendentales inscrites dans l'écriture symbolique, sans chaque fois repasser par le registre des significations, est devenue une autre de ces facultés majeures, universellement requise de tout chercheur ou enseignant en mathématiques. C'est en même temps ce qui peut séparer ou éloigner chaque jour davantage les mathématiciens et les mathématiques des autres activités humaines. A cette situation bien regrettable, à l'origine d'un fossé qui n'a fait que s'élargir depuis le XVIIe siècle, l'enseignement des méthodes, c'est-à-dire de l'épistémologie, serait sans doute la seule possible solution, qui redonnerait en même temps à la langue naturelle sa place prééminente. Mais ceci est une autre histoire.

Bibliographie.

ANDRE D	*Des Notations mathématiques. Enumération, Choix et Usage.*	Gauthier Villars. Paris.1909.
BELAVAL Y	*Leibniz, critique de Descartes.*	Gallimard. Paris. 1960
BELAVAL Y	*Leibniz, initiation à sa philosophie.*	Vrin. Paris .1989.
BOOLE G *(Laws)*	*An Investigation of THE LAWS OF THOUGHT on which are founded the mathematical theories of Logic and Probabilities.*	Mac Millan. 1854 Réimpress.Dover. New-York. 1958.
BORTOLLOTTI E	*L'Algebra, Opera di Rafael Bombelli di Bologna.* (Livres IV - V) Précédé d' " Analisi dell' Algebra " .	N. Zanichelli. Bologne. 1929 .
BOS H.J.M *(Structure...)*	*The structure of Descarte's "Geometrie".*	Lectures in the History of Mathematics A.M.S. History of Mathematics, 7, 1991, 37-57.
BOS H.J.M	*Lectures in the History of Mathematics.*	American Mathematical Society. History of Mathematics, 7.1991.
BOUVERESSE J	*Sur le " finitisme " de Wittgenstein in La Parole Malheureuse*	Editions de Minuit. Paris.1971
BRUNSCHWICG L	*Les étapes de la philosophie mathématique.*	Librairie A.BLANCHARD. Paris .Edition 1981.
CAJORI F	*A History of Mathematics.*	Chelsea Ed. New- York. 1985 (4° édition).
CAJORI F (I et II)	*A History of mathematical notations .(Vol I et II)*	The Open Court Publishing Company. La Salle. Illinois. 1928.
CAJORI F. *(Leibniz)*	*Leibniz, the master- builder of Mathematical Notations.*	ISIS, 23, 1925, 412-429.
CARDAN J	*Ars Magna, sive de regulis algebraicis liber unus.*	Oeuvres, IV, Lyon .1663.
CASSINET J et aliens	*(I I) Equations du Second degré.* *(I I I) Equations du Troisième degré.* *(I V)Equations du Quatrième degré.*	Publications de l ' I. R . E . M de Toulouse Université Paul Sabatier. 1979,1980 et1982 respect.
CAVAILLES J	*Philosophie mathématique.*	Herman. Paris. 1962 . réimpress.1984 .
CEGIELSKI P	*Historique de la théorie élémentaire des ensembles* in Fragments d'histoire des mathématiques, II.	Brochure N° 65. Assoc.Prof.Math.Ens.Public,1987. 26 Rue Duméril.75013. Paris.
CHASLES M *(Inauguration)*	*Discours d'inauguration du Cours de Géométrie Supérieure (1846).* in Traité de Géométrie Supérieure.	Gauthier-Villars. Paris. 1880.
CHILD J.M *(The Early ...)*	*The Early Mathematical Manuscripts of Leibniz.*	The Open Court Publishing Company. Chicago. London.1920.

CHOMSKI N — *Structures syntaxiques.* Traduction de Michel Brodeau. — Seuil. Paris.1969, pour la traduction.

CLAVIUS C — *Algebra in Opera Mathematica .Tomus Secundus.* — Moguntiae, Eltz .1611-1612.

COSTABEL P — *Les Essais de la Méthode et la réforme mathématique in Le Discours et sa Méthode, 213-228.* Colloque pour le 350e anniversaire du Discours de la Méthode (Eds: N. Grimaldi et J.L. Marion) — P.U.F. Paris.1987

COSTABEL P — *Démarches originales de Descartes savant.* — Vrin reprise. Paris. 1982 .

COUTURAT L *(Logique)* — *La logique de Leibniz.* — Paris. Alcan .1901. Réimpress. Gerhardt . Hildesheim.1985.

DASCAL M — *La sémiologie de Leibniz.* — Aubier Montaigne. Paris. 1978.

DESCARTES R *(A. T)* — *Oeuvres (11 volumes)* — Edition Adam-Tannery. Vrin. Paris (réimpress. à partir de 1968)

DESCARTES R *(Regulae)* — *Règles utiles et claires pour la Direction de l'Esprit et la Recherche de la Vérité.* — Martinus Nijhoff. La Haye . 1977. traduction de J-L Marion.

FICHANT M et PECHEUX M — *Sur l'histoire des sciences.* — Maspéro. Paris. 1969 .

FOUCHER de CAREIL — *Pensées de Descartes.* in Oeuvres inédites de Descartes. — Durand. Paris. 1859.

FREGE G — *Les fondements de l'arithmétique.* Traduction et introduction de Claude Imbert. — Seuil. Paris.1969.

FREGE G — *Ecrits logiques et philosophiques.* Traduction et introduction de Claude Imbert . — Seuil. Paris. 1971.

GILSON E — *René Descartes. Discours de la méthode .* — Vrin. Paris. 1962 .

GRANGER G *(Style)* — *Essai d'une philosophie du style.* — Armand Colin. Paris.1968

GRANGER G *(Formes)* — *formes, opérations, objets.* — Vrin. Paris .1994.

GRATZER G — *General lattice theory.* — Birkhäuser. Basel-Stuttgart. 1978

GUITEL G	*Histoire comparée des numérations écrites.*	Flammarion. Paris .1975 .
(Numérations...)		
HADAMARD J	*Essai sur la psychologie de l'invention*	réédition Bordas. Paris. 1975
	dans le domaine mathématique.	
HEATH T	*The Thirteen Books of The Elements(3 Vol).*	2nd Edition Unabriged. Dover-New-York. 1956.
(Elements)		
HEATH T	*A History of Greek Mathematics(2 Vol).*	Dover. New-York. 1921 .Ed 1981.
(Greek)		
HOFMANN J	*Leibniz in Paris. 1627-1676. His growth*	Cambridge University Press. 1974.
(Leibniz in Paris)	*to mathematical maturity.*	
	Trad. de Die Entwicklungeschichte Mathematik	Oldenbourg. Munich. 1949.
	während des Aufenthalts in Paris (1672-1676)	
LARGEAULT J	*Logique et philosophie chez Frege.*	Nauwelaerts. Louvain-Paris.1970.
LEIBNIZ G.W	*Opuscules et fragments inédits*	Alcan. Paris. 1903.
(Opuscules)	réunis par Louis Couturat.	Réimpression Olms. Hildesheim 1988.
LEIBNIZ G.W	*Briefwechsel mit Mathematikern.*	Edition Gerhardt. Hildesheim .Ed. 1987.
(B w)		
LEIBNIZ G.W	*Mathematische Schriften (7 Vol).*	Edition Gerhardt. Hildesheim .Ed. 1971.
(M . S)		
LEIBNIZ G.W	*Die philosophischen Schriften (7 Vol).*	Edition Gerhard . Hildesheim .Ed. 1978.
(P . S)		
MILHAUD G	*Descartes savant.*	Félix Alcan. Paris. 1921.
MONTUCLA J-F	*Histoire des recherches sur la Quadrature du Cercle.*	Ant. Jombert . Paris. 1754.
		Réed. fac.sim. IREM Paris VII.1986.
MONTUCLA J-F	*Histoire des Mathématiques.*	Henri Agasse. Paris .1799 .
		Réédit. fac sim. Librairie A.Blanchard.Paris
NESSELMANN G.H.F	*Die Algebra der Griechen.*	Berlin, 1842.
PARMENTIER M	Leibniz : naissance du calcul différentiel.	Vrin. Paris.1989.
RITTER F	*François Viète, inventeur de l'Algèbre moderne,*	Revue Occidentale Philosoph., sociale et politique.
	1540-1603. Essai sur sa vie et son oeuvre.	2nd ser., 10 (1895), 234-274, 354-415.
RODIS-LEWIS G	*L'Oeuvre de Descartes(2 Vol).*	Vrin. Paris. 1971.
RODIS- LEWIS G	*La science chez Descartes.*	Garland. New York and London. 1987.
(éditeur)		
SCHWARTZ L	*Méthodes mathématiques pour les sciences physiques.*	Hermann. Paris.1965.

SERFATI M *(La question ...)*	*La question de la " chose ". Mathématiques et écriture symbolique.*	Actes Colloq. d'Histoire et Epistémologie des Mathématiques. Strasbourg. Univ. L. Pasteur. 309-335.
SERFATI M *(Le secret...)*	*Tartaglia versus Cardan. Le secret et la Règle .*	Actes du Séminaire de Philosophie et Mathématiques. N° 96. Séance du 11 Mai 1992. Publication de l'Université Paris XIII.
SERFATI M *(Quadrature du cercle..)*	*Quadrature du cercle, fractions continues, et autres contes.*	Editions de l'Association des Professeurs de Mathématiques. 26 Rue Duméril . 75013 Paris. 1992.
SERFATI M *(Compas)*	*Les compas cartésiens.*	Archives de Philosophie(56),1993,197- 230.
SERFATI M	*Descartes et les équations du quatrième degré.*	Mnemosyne, 6 ,1993. IREM. Univ. Paris VII.
SERFATI M *(Naissance ...)*	*Naissance de l'écriture symbolique mathématique , de Descartes à Leibniz .*	*in Calculemos . . . Homenaje al Profesor Miguel Sanchez- Mázas.* Ed. Trotta. Madrid. 1996.
SERFATI M *(Theoria)*	*Regulae et Mathématiques.*	Theoria. Segunda Epoca, IX , N° 21, p. 61- 108.
SERFATI M *(Choix)*	*Infini " nouveau ". Principes de choix effectifs.* in Infini des philosophes, infini des astronomes, 207-238.	Belin. Paris.1995.
TARTAGLIA N *(Quesiti)*	*Quesiti et inventioni diverse.*	Reprod. fac-simile de l'édition de 1554. Edit. avec introduct. par A. Masotti. Ateneo di Brescia. 1959.
VAN DER WAERDEN B.L	*A History of Algebra. From al- Khwàrismí to Emmy Noether.*	Springer-Verlag. Berlin. 1903. Ed. 1985.
VAN DER WAERDEN B.L	*Algebra.*	Springer-Verlag. Berlin. 1991. Première édition Ungar.1970.
VAN HEIJENOORT J	*From Frege to Gödel.*	Harvard University Press. Cambridge. Massachusetts. 1967.
VER EECKE P *(Proclus)*	*Proclus de Lycie. Les commentaires sur le premier livre des Eléments d'Euclide.*	Desclée de Brouwer. Bruges. 1948.
VER EECKE P *(Diophante)*	*Diophante d'Alexandrie. Les Six livres d'Arithmétique et le Livre des Nombres Polygones.*	Librairie Albert Blanchard. Paris.1959.

VIETE F *(Isagoge)*	*In artem analyticem Isagoge sursim excussa ex opere restitutae mathematicae analyseos seu Algebra nova.*	T. Mettayer. Tours. 1591.
	Traduction française de J. L de Vaulézard (1630) : *La nouvelle algèbre de Monsieur Viète.*	Corpus des oeuvres de philosophie en langue française. Fayard. Paris. 1986.
WHITTAKER and WATSON	*A course of modern analysis.*	Cambridge University Press. 1969.
WITMER T.R *(The Great Art)*	*The Great Art, or the Rules of Algebra by Girolamo Cardano.*	The M.I.T Press. Cambridge. Massachussets. 1968.

396

Index des auteurs.

- Les références aux pages de l'introduction sont précédées de la lettre i.

- lorsque les références à un auteur apparaissent continûment dans une section, celle-ci est globalement indiquée entre crochets, suivant le nom de l'auteur (par exemple : Euler [14.2.2]).

- Descartes et Leibniz auxquels les références auraient été trop nombreuses, n'apparaissent pas ici. On pourra consulter la table des matières détaillées placée au début.

Index des sujets.

- Les références aux pages de l'introduction sont précédées de la lettre i.

M

N

P

S

T

U